VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

РЕДАКЦИЯ АКАД. В. И. СМИРНОВА

СТАТЬЯ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧЛЕНА АН УССР
Б. В. ГНЕДЕНКО И ДОЦ. И. А. МАРОНА

ПРИМЕЧАНИЯ

ДОЦ. В. И. АНТРОПОВОЙ, ДОЦ. И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО,
ПРОФ. Н. Н. ПОЛЯХОВА, ПРОФ. Е. Я. РЕМЕЗА,
АКАД. В. И. СМИРНОВА, ПРОФ. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА

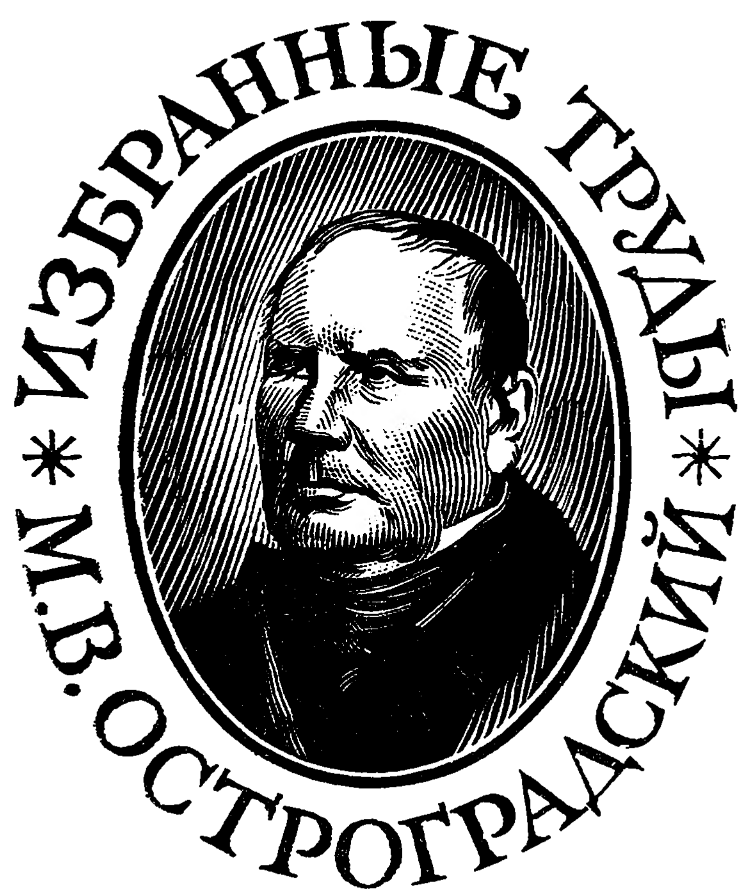
$$\int\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\omega=\int\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\right)s$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1958

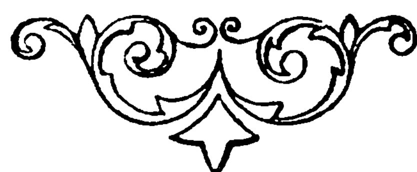
СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик ***И. Г. Петровский*** (председатель), академик *Н. Н. Андреев*, академик *К. М. Быков*, академик ***Б. А. Казанский***, академик *Д. И. Щербаков*, академик ***П. Ф. Юдин***, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, проф. *Д. М. Лебедев*, проф. ***Н. А. Фигуровский***, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов* (заместитель председателя)


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
М.В. ОСТРОГРАДСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



МЕМУАР ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ВАРИАЦИЙ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Применение метода вариаций к функциям, которые содержат лишь интегралы, относящиеся к одной переменной, не оставляет ничего желать ни со стороны простоты, ни со стороны общности. Но не так обстоит дело в том случае, когда дело идет об отыскании вариации кратного интеграла, взятого относительно нескольких переменных. Некоторые вопросы, относящиеся к этому случаю, по-видимому, требуют большей общности, чем та, какую дает метод вариаций в виде, изложенном Лагранжем. Отсюда можно заключить, или что принципы этого великого математика применялись не совсем правильно, или что сами эти принципы не всегда являются достаточными.

Несомненно, по этой причине Пуассон в мемуаре, который он доложил 10 ноября 1831 г. Парижской Академии наук, счел необходимым добавить к принципам вариационного исчисления, установленным Лагранжем, нечто вроде нового принципа. Он заключается в том, что независимые переменные в задаче рассматриваются как функции других вспомогательных переменных. Эти последние исчезают сами собой в ходе вычисления; но вводя их в случае двух независимых переменных x и y, Пуассон избегает для вариаций δx и δy предположения о независимости первой от величины y, а второй — от величины x. Между тем все математики, отыскивавшие вариацию частных производных функции от двух переменных, в силу самой природы своих вычислений, были в известном смысле вынуждены делать это предположение.

Однако предположения, что δx не зависит от y, а δy — от x, кажутся вытекающими из самых простых и элементарных прин-

ципов дифференциального исчисления; и пока не доказано, что эти принципы недостаточны (или что их неправильно применяли), останется открытым вопрос, следует ли предпочесть формулы Пуассона для вариации частных производных функции от двух переменных формулам Эйлера и других математиков, относящимся к тому же вопросу. В сущности, последние формулы являются частными случаями первых; но, может быть, этот частный случай должен иметь место всегда.

Мы разрешаем этот вопрос в пользу формул Пуассона. Мы доказываем, что математики, которые занимались задачей о вычислении вариаций двойных интегралов, включая самого Эйлера, дифференцировали с характеристикой δ частные производные основной переменной ненадлежащим образом. Но мы увидим также, что введение вспомогательных переменных в задачах этого рода вовсе не необходимо. Мемуар Пуассона о вариационном исчислении всегда будет приводиться в истории дифференциального анализа. Именно в этом труде мы впервые встречаем полную вариацию двойного интеграла. Она выведена там из рассмотрения вспомогательных переменных. Но можно держаться в этом случае и принципов бессмертного автора «Аналитической механики», принципов, сочетающих всю желаемую общность с величайшей простотой.

В дальнейшем мы покажем прежде всего, в чем состоит ошибка, ускользнувшая от математиков, отыскивавших вариации частных производных функции от двух переменных, а затем укажем способ для нахождения вариации какого угодно кратного интеграла.

I. Обозначим через z функцию двух независимых переменных x и y и положим $\frac{dz}{dx}=z'$, $\frac{dz}{dy}=z_{,}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=z''$, $\frac{d^2x}{dxdy}=z'_{,}$, $\frac{d^2z}{dy^2}=z_{,,}$ и т. д.; затем дадим величинам x, y, z соответственно одновременные приращения δx, δy, δz, которые мы будем рассматривать как бесконечно малые и произвольные функции x и y; в силу этих приращений величины z', $z_{,}$, z'', ... обратятся соответственно в $z'+\delta z'$, $z_{,}+\delta z_{,}$, $z''+\delta z''$, ...; поставим себе целью найти вариации $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''$.

Рассмотрим сначала $\delta z'$. Так как $z' = \frac{dz}{dx}$, то предполагалось, что для нахождения $\delta z'$ нужно, как обычно, дифференцировать со знаком δ величину $\frac{dz}{dx}$, что и давало неверный результат $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z' \frac{d\delta x}{dx}$. Чтобы вскрыть источник ошибки, нужно только вернуться к происхождению величины $\delta z'$; если мы на момент обозначим $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ соответственно через X, Y, Z, то будем, очевидно, иметь

$$z' + \delta z' = \frac{dZ}{dX}$$

и

$$\delta z' = \frac{dZ}{dX} - z';$$

частные производные z' и $\frac{dZ}{dX}$ взяты: первая в предположении, что постоянна величина y, вторая в предположении, что неизменна Y, т. е. $y + \delta y$; а между тем считалось, что для обеих производных $\frac{dZ}{dX}$ и z' имеет место одно и то же предположение $dy = 0$, в этом и состояла ошибка.

Подставим вновь вместо X, Y, Z их значения $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Будем иметь

$$\delta z' = \frac{d\,(z + \delta z)}{d\,(x + \delta x)} - z' = \frac{d\,(z + \delta z) - z'd\,(x + \delta x)}{d\,(x + \delta x)},$$

причем дифференциалы $d\,(z + \delta z)$ и $d\,(x + \delta x)$ взяты в предположении $d\,(y + \delta y) = 0$.

Но

$$d\,(z + \delta z) = \left(z' + \frac{d\delta z}{dx}\right) dx + \left(z_{,} + \frac{d\delta z}{dy}\right) dy,$$

$$d\,(x + \delta x) = \left(1 + \frac{d\delta x}{dx}\right) dx + \frac{d\delta x}{dy}\, dy,$$

$$d\,(y + \delta y) = \frac{d\delta y}{dx}\, dx + \left(1 + \frac{d\delta y}{dy}\right) dy;$$

подставляя предыдущие значения $d(z+\delta z)$ и $d(x+\delta x)$ в последнее выражение для $\delta z'$, получим

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}\right)dx + \left(z_, + \frac{d\delta z}{dy} - z'\frac{d\delta x}{dy}\right)dy}{\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)dx + \frac{d\delta x}{dy}dy}$$

и в то же время

$$0 = \frac{d\delta y}{dx}dx + \left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)dy;$$

исключая dx и dy, находим

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx} - z_,\frac{d\delta y}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right) - \left(\frac{d\delta z}{dy} - z'\frac{d\delta x}{dy} - z_,\frac{d\delta y}{dy}\right)\frac{d\delta y}{dx}}{\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right) - \frac{d\delta x}{dy}\frac{d\delta y}{dx}};$$

или, ограничиваясь лишь бесконечно малыми первого порядка,

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx} - z_,\frac{d\delta y}{dx}.$$

Если сравнить это значение $\delta z'$ со значением $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}$, то заметим, что, связывая производную $\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}$ с предположением $dy=0$, а не $d(y+\delta y)=0$, мы опускаем в $\delta z'$ член $-z_,\frac{d\delta y}{dx}$, который имеет тот же порядок величины, что и $\delta z'$, и который, согласно принципам дифференциального исчисления, должен быть сохранен в выражении для $\delta z'$.

Предположим, что величина δy независима от x; будем иметь $\frac{d\delta y}{dx}=0$ и $\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx}$, как это получается и обычным дифференцированием со знаком δ величины $\frac{dz}{dx}$; легко видеть, что в предположении $\frac{d\delta y}{dx}=0$ обычное дифференцирование допустимо, ибо тогда $d(y+\delta y) = \left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)dy$, и, полагая $d(y+\delta y)=0$, найдем, очевидно, $dy=0$; поэтому в выражении $\delta z' = \frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)} - z'$ обе

частные производные z' и $\frac{d(z+\delta z)}{d(x+\delta x)}$ связаны с одним и тем же предположением $dy=0$.

Очевидно, что,

$$\delta z' = \frac{d\delta z}{dx} - z'\frac{d\delta x}{dx} - z_{,}\frac{d\delta y}{dx} = z''\delta x + z'_{,}\delta y + \frac{d(\delta z - z'\delta x - z_{,}dy)}{dx}.$$

Таким же образом найдем

$$\delta z_{,} = z'_{,}\delta x + z_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dy}.$$

Чтобы перейти ко вторым производным, заметим, что

$$\delta z'' = \frac{d(z'+\delta z')}{d(x+\delta x)} - z'',$$

$$\delta z'_{,} = \frac{d(z'+\delta z')}{d(y+\delta y)} - z'_{,} = \frac{d(z_{,}+\delta z_{,})}{d(x+\delta x)} - z'_{,},$$

$$\delta z_{,,} = \frac{d(z_{,}+\delta z_{,})}{d(y+\delta y)} - z_{,,}.$$

Поэтому мы получим вариации $\delta z''$, $\delta z'_{,}$, $\delta z_{,,}$, заменив соответствующим образом в значениях $\delta z'$ и $\delta z_{,}$ величину z через z' или через $z_{,}$. Получим сначала

$$\delta z'' = z'''\delta x + z''_{,}\delta y + \frac{d(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y)}{dx},$$

$$\delta z'_{,} = z''_{,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y)}{dy},$$

$$\delta z'_{,} = z''_{,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d(\delta z_{,} - z'_{,}\delta x - z_{,,}\delta x)}{dx},$$

$$\delta z_{,,} = z'_{,,}\delta x + z_{,,,}\delta y + \frac{d(\delta z_{,} - z'_{,}\delta x - z_{,,}\delta y)}{dy};$$

затем

$$\delta z'' = z'''\delta x + z''_{,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dx^2},$$

$$\delta z'_{,} = z''_{,}\delta x + z'_{,,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dxdy},$$

$$\delta z_{,,} = z'_{,,}\delta x + z_{,,,}\delta y + \frac{d^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{dy^2}.$$

Так же легко получатся вариации производных высших порядков.

II. Из предыдущего достаточно ясно, как получить путем непосредственного применения характеристики δ к частным производным z', $z_{,}$, z'', ... вариации этих производных. Но предпочтительнее отыскать вариации $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''$, ..., пользуясь полными производными.

Действительно, чтобы рассмотреть вопрос в общем виде, обозначим через u функцию любого числа величин x, y, z, ... и предположим, что переменная u, а также независимые величины x, y, z, ... получают одновременно приращения δu, δx, δy, δz, ..., которые мы будем рассматривать как вполне произвольные функции всех независимых переменных.

Чтобы найти вариации $\delta\frac{du}{dx}$, $\delta\frac{du}{dy}$, $\delta\frac{du}{dz}$, ..., соответствующие приращениям δu, δx, δy, δz, ..., возьмем основное уравнение

$$\delta du = d\delta u,$$

подставим в него вместо $d\delta u$ его значение

$$\frac{d\delta u}{dx}dx + \frac{d\delta u}{dy}dy + \frac{d\delta u}{dz}dz + \ldots,$$

вместо du его значение

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots,$$

затем разложим

$$\delta du = \delta\left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots\right)$$

следующим образом:

$$\delta du = \left(\delta\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dx} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dx} + \ldots\right)dx +$$

$$+\left(\delta\frac{du}{dy} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dy} + \ldots\right)dy +$$

$$+\left(\delta\frac{du}{dz} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dz} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dz} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dz} + \ldots\right)dz +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и сравним коэффициенты при произвольных величинах dx, dy, dz, ... Мы получим сразу же

$$\delta\frac{du}{dx} = \frac{d\delta u}{dx} - \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dx} - \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx} - \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dx} - \ldots,$$

$$\delta\frac{du}{dy} = \frac{d\delta u}{dy} - \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dy} - \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dy} - \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dy} - \ldots,$$

$$\delta\frac{du}{dz} = \frac{d\delta u}{dz} - \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\delta x}{dz} - \frac{du}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dz} - \frac{du}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dz} - \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Легко придать этим выражениям следующий вид:

$$\delta\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}\delta x + \frac{d^2u}{dxdy}\delta y + \frac{d^2u}{dxdz}\delta z + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z - \ldots\right)}{dx},$$

$$\delta\frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy}\delta x + \frac{d^2u}{dy^2}\delta y + \frac{d^2u}{dydz}\delta z + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z - \ldots\right)}{dy};$$

$$\delta\frac{du}{dz} = \frac{d^2u}{dxdz}\delta x + \frac{d^2u}{dydz}\delta y + \frac{d^2u}{dz^2}\delta z + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d\left(\delta u - \frac{du}{dx}\delta x - \frac{du}{dy}\delta y - \frac{du}{dz}\delta z \ldots\right)}{dz},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, полагая для сокращения

$$\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z + \ldots + Du,$$

находим

$$\delta\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}\delta x + \frac{d^2u}{dxdy}\delta y + \frac{d^2u}{dxdz}\delta z + \ldots + \frac{dDu}{dx},$$

$$\delta\frac{du}{dy} = \frac{d^2u}{dxdy}\delta x + \frac{d^2u}{dy^2}\delta y + \frac{d^2u}{dydz}\delta z + \ldots + \frac{dDu}{dy},$$

$$\delta\frac{du}{dz} = \frac{d^2u}{dxdz}\delta x + \frac{d^2u}{dydz}\delta y + \frac{d^2u}{dz^2}\delta z + \ldots + \frac{dDu}{dz},$$

. . . . [1]

Заметим, что члены, не зависящие от Du в предыдущих формулах, сводятся к обыкновенным производным величин u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, ..., рассматриваемых как функции x, y, z, ..., причем предполагается, что дифференциалы величин x, y, z, ... суть δx, δy, δz, ... Поэтому, если мы обозначим характеристикой Δ дифференциал некоторой функции от x, y, z, ..., зависящий от приращений δx, δy, δz, ..., то сможем написать

$$\delta u = \Delta u + Du,$$

$$\delta\frac{du}{dx} = \Delta\frac{du}{dx} + \frac{dDu}{dx},$$

$$\delta\frac{du}{dy} = \Delta\frac{du}{dy} + \frac{dDu}{dy},$$

$$\delta\frac{du}{dz} = \Delta\frac{du}{dz} + \frac{dDu}{dz},$$

. . . .

Нетрудно найти вариацию производных высшего порядка $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdz}$, ... и легко убедиться, что имеем вообще:

$$\delta\frac{d^iu}{dx^ldy^mdz^n\ldots} = \Delta\frac{d^iu}{dx^ldy^mdz^n\ldots} + \frac{d^iDu}{dx^ldy^mdz^n\ldots}.$$

III. Предыдущего достаточно, чтобы найти вариацию функции U от u, x, y, z, ... и частные производные основной переменной u относительно величин x, y, z, ... Нужно только продифференцировать U, увеличивая все величины x, y, z, ... и все функции u, $\frac{du}{dx}$, ... на их вариации δ. Но, поскольку вариации δu, $\delta\frac{du}{dx}$, ... состоят каждая из двух бесконечно малых частей, можно, на основании принципов дифференциального исчисления, поступить так: увеличив x, y, z, ... соответственно на δx, δy, δz, ..., придать функциям u, $\frac{du}{dx}$, ... лишь первые части Δu, $\Delta\frac{du}{dx}$, ... их вариаций. Тогда U получит приращение, которое составит первую часть вариации δU; затем, не меняя x, y, z, ..., увеличим функцию и ее производные на вторые части Du, $\frac{dDu}{dx}$, ... их вариаций; приращение, которое получит от этого функция U, составит вторую часть ее вариации.

Первая часть вариации δU будет, очевидно,

$$\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z\ldots,$$

причем в производных $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, ... мы изменяем: в первой все, что изменяется вместе с x, во второй все, что изменяется вместе с y, в третьей все, что изменяется вместе с z, и т. д. Обозначим через DU вторую часть вариации δU; эта часть зависит от приращения Du величины u, которое следует дать этой последней всюду, где эта функция содержится в U; получим

$$\delta U=\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z+\ldots+DU.$$

Мы позволим себе не давать здесь разложения производной DU.

IV. Поставим себе целью найти вариацию определенного интеграла

$$V=\int U dxdydz\ldots,$$

взятого для всех значений $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющих неравенству

$$L < 0,$$

где L — функция $x, y, z, \ldots$

Вариация интеграла $\int U dxdydz \ldots$, очевидно, равна сумме вариаций всех его дифференциальных элементов; поэтому, чтобы иметь δV, нужно только взять интеграл вариации $\delta (U dxdydz \ldots)$ и получим

$$\delta V = \mathrm{S}\, \delta (U dxdydz \ldots)\ [2].$$

Но, согласно принципам дифференциального исчисления, имеем

$$\delta (U dxdydz \ldots) = \delta U dxdydz \ldots + U \delta (dxdydz \ldots),$$

отсюда, в силу предыдущего параграфа,

$$\delta (U dxdydz \ldots) = \left(\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \ldots\right) dxdydz \ldots +$$

$$+ U \delta (dxdydz \ldots) + DU dxdydz \ldots,$$

итак

$$\delta V = \mathrm{S}\left[\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + U \frac{\delta (dxdydz \ldots)}{dxdydz \ldots}\right] dxdydz \ldots + \mathrm{S} DU dxdydz \ldots$$

Мы сейчас докажем, что

$$\delta (dxdydz \ldots) = \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} + \ldots\right) dxdydz \ldots,$$

и из этого будет следовать

$$\delta V = \mathrm{S}\left[\frac{d (U\delta x)}{dx} + \frac{d (U\delta y)}{dy} + \frac{d (U\delta z)}{dz} + \ldots\right] dxdydz \ldots$$

$$\ldots + \mathrm{S} DU dxdydz \ldots$$

В производных $\frac{d (U\delta x)}{dx}, \frac{d (U\delta y)}{dy}, \frac{d (U\delta z)}{dz}, \ldots$ нужно изменять: в первой все, что изменяется вместе с x, во второй все, что изменяется с y, в третьей все, что изменяется с z, и т. д.

V. Займемся теперь вариацией $\delta(dxdydz\ldots)$.

Положим $x+\delta x=X$, $y+\delta y=Y$, $z+\delta z=Z$, ..., тогда

$$\delta(dxdydz\ldots)=dXdY\,dZ\ldots-dxdydz\ldots$$

Так как величины X, Y, Z, ... являются функциями x, y, z, ..., то, чтобы получить один из дифференциалов dX, dY, dZ, ..., например dX, нам нужно лишь дифференцировать обыкновенным образом величину X, рассматривая Y, Z, ... как постоянные; имеем тогда

$$dX=\frac{dX}{dx}dx+\frac{dX}{dy}dy+\frac{dX}{dz}dz+\ldots$$

$$0=\frac{dY}{dx}dx+\frac{dY}{dy}dy+\frac{dY}{dz}dz+\ldots$$

$$0=\frac{dZ}{dx}dx+\frac{dZ}{dy}dy+\frac{dZ}{dz}dz+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

а отсюда получаем

$$dX=\frac{S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)}{S\left(\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)}dx.$$

Следуя Коши, мы разумеем под обозначением

$$S(a.b.c\ldots)$$

результат исключения величин p, q, r, ..., удовлетворяющих уравнениям

$$0=ap+a_1q+a_2r+\ldots,$$

$$0=bp+b_1q+b_2r+\ldots,$$

$$0=cp+c_1q+c_2r+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Предполагается, что член $ab_1c_2\ldots$ этого результата берется со знаком $+$.

Чтобы найти dY, нужно дифференцировать Y, полагая $dX=0$, $dZ=0$, ..., т. е. полагая $dx=0$, $dz=0$, откуда получаем

$$dY=\frac{dY}{dy}dy+\frac{dY}{dz}dz+\ldots,$$

$$0=\frac{dZ}{dy}dy+\frac{dZ}{dz}dz+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и потому

$$dY=\frac{S\left(\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)}{S\left(\frac{dZ}{dz}\ldots\right)}dy;$$

точно так же найдем

$$dZ=\frac{S\left(\frac{dZ}{dz}\ldots\right)}{S(\ldots)}dz,$$

и т. д. Знаменателем последней производной будет единица; ибо если бы, например, последней переменной было Z, то мы имели бы

$$dZ=\frac{dZ}{dz}dz.$$

Составляя произведение $dXdYdZ\ldots$, находим

$$dXdYdZ\ldots=S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)dxdydz\ldots$$ [3, 4];

следовательно,

$$\delta(dxdydz\ldots)=\left[S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)-1\right]dxdydz\ldots.$$

Принципы дифференциального анализа требуют, чтобы при вычислении коэффициента

$$S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)-1$$

принимались во внимание только бесконечно малые первого порядка, ибо $\frac{\delta(dxdydz\ldots)}{dxdydz\ldots}$ есть бесконечно малая этого же порядка.

Но, за исключением $\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}$, ..., все остальные члены суммы $S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)$ являются бесконечно малыми, по крайней мере, второго порядка; поэтому, ограничиваясь величинами этого порядка, имеем

$$S\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots\right)=\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots$$

и, следовательно,

$$\delta(dxdydz\ldots)=\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\ldots-1\right)dxdydz\ldots$$

Подставим теперь обратно вместо $X, Y, Z, \ldots$ их значения $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ...; тогда получим

$$\delta(dxdydz\ldots)=\left[\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)\left(1+\frac{d\delta y}{dy}\right)\left(1+\frac{d\delta z}{dz}\right)\ldots-1\right]dxdydz\ldots,$$

или, ограничиваясь лишь бесконечно малыми первого порядка,

$$\delta(dxdydz\ldots)=\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}+\ldots\right)dxdydz\ldots$$

VI. Прежде чем идти дальше, определим, каковы должны быть пределы переменных $x, y, z\ldots$ в интеграле

$$\int U dxdydz\ldots,$$

распространенном на все значения $x, y, z, \ldots$, которые удовлетворяют неравенству $L>0$, так что на пределах этого интеграла имеем $L=0$. Мы ставим себе задачей интегрировать сначала по x, затем по y, затем по z и т. д. [5].

Предположим, что уравнение $L=0$, решенное относительно x, дает для этой переменной только два значения X_0 и X. Эти значения являются пределами переменной X, и, предполагая, что

функция L остается отрицательной для значений x, заключенных между X_0 и X, мы будем интегрировать выражение

$$\int U dx dy dz \ldots$$

от x, равного меньшему из двух корней X_0 и X, до x, равного большему из этих корней. Что касается величин y, z, ..., то им нужно давать все те значения, при которых X_0 и X получаются вещественными, и, наоборот, исключать значения y, z, ..., при которых X_0 и X получаются мнимыми. Но при переходе от вещественных значений к мнимым корни X_0 и X, как известно из теории уравнений, становятся равными между собой; поэтому на пределах y, z, ... мы будем иметь одновременно

$$L = 0, \quad \frac{dL}{dx} = 0.$$

Исключая x из этих двух уравнений, мы получим одно, содержащее y, z, ... и относящееся к пределам этих величин; положим, что оно даст для y два значения Y_0 и Y; эти значения будут пределами, между которыми нужно будет интегрировать $\int U dx dy dz \ldots$ по отношению к y; интеграл должен быть взят от меньшей из двух величин Y_0 и Y до большей из них.

Можно прийти к тому же выводу следующим образом: проинтегрировав по отношению к x, нужно проинтегрировать относительно y, очевидно, от меньшего до большего значений этой переменной, предполагая x и y связанными уравнением $L = 0$ и рассматривая z, ... как постоянные. Дифференцируя в этом предположении, находим

$$0 = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dy}{dx};$$

но чтобы y было максимальным или минимальным, нужно иметь $\frac{dy}{dx} = 0$, а это дает для предела y то же уравнение $\frac{dL}{dx} = 0$, которое было найдено нами ранее.

Чтобы найти пределы для переменной z, будем поступать с уравнением, которое получается путем исключения x из $L=0$ и $\frac{dL}{dx}=0$, так же, как мы поступали с уравнением $L=0$. При этом мы имеем право предположить, что результатом исключения переменной x из уравнений $L=0$ и $\frac{dL}{dx}=0$ будет то же уравнение $L=0$, в котором вместо x подставлено его значение, полученное из $\frac{dL}{dx}=0$; следовательно, чтобы найти пределы для z, нужно дифференцировать $L=0$ по y, рассматривая x как функцию y; тогда имеем

$$\frac{dL}{dy}+\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=0,$$

или $\frac{dL}{dy}=0$, ибо $\frac{dL}{dx}=0$. Исключая y из $L=0$ и $\frac{dL}{dy}=0$, получим уравнение, из которого определяются пределы для z. Продолжая таким же образом, найдем пределы для всех переменных, входящих в интеграл

$$\int U dx dy dz \ldots$$

Итак, резюмируем: пределы для x непосредственно даются решением относительно этой переменной уравнения $L=0$; пределы для y находятся решением относительно этой переменной уравнения, получаемого путем исключения x из $L=0$, $\frac{dL}{dx}=0$; пределы для z находятся решением относительно этой переменной уравнения, получаемого путем исключения x и y из $L=0$, $\frac{dL}{dx}=0$, $\frac{dL}{dy}=0$, и т. д.

Мы предположили, что уравнения, относящиеся к пределам интеграла

$$\int U dx dy dz \ldots,$$

дают для каждой величины $x, y, z, \ldots$ только два решения; но, согласно предыдущему, нетрудно рассмотреть и случай, когда

упомянутые уравнения дают более двух корней. Число предельных значений для каждой переменной x, y, z, ..., включая в них в случае необходимости бесконечно большие значения, должно быть четное.

VII. Вернемся к вариации

$$\delta V = \int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \ldots\right] dxdydz\ldots + \\ + \int DU dxdydz\ldots,$$

положим в ней для сокращения $U\delta x = P$, $U\delta y = Q$, $U\delta z = R$, тогда получим

$$\delta V = \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \ldots\right) dxdydz\ldots + \int DU dxdydz\ldots$$

Рассмотрим сначала часть

$$\int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \ldots\right) dxdydz\ldots$$

предшествующей вариации; положим, что из двух значений X_0, X, которые получаются для x из уравнения $L = 0$, X является бо́льшим; тогда

$$\int \frac{dP}{dx} dxdydz\ldots = \int (P_X - P_{X_0})\, dydz\ldots$$

Мы обозначаем здесь через P_X то, во что обращается P при подстановке X вместо x, а через P_{X_0} — то, во что обращается P, когда $x = X_0$.

Так как функция L имеет положительное значение прежде чем она обратится в нуль при $x = X_0$ и отрицательное значение — прежде чем она обращается в нуль при $x = X$, то производная $\frac{dL}{dx}$ отрицательна для $x = X_0$ и положительна для $x = X$; поэтому, если возьмем радикал $\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}$ со знаком $+$, то будем иметь

$$-P_{X_0}=\frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}} \quad \text{для } x=X_0,$$

$$P_X=\frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}} \quad \text{для } x=X.$$

Подставляя эти значения в равенство

$$\int\frac{dP}{dx}\,dxdydz\ldots=\int(P_X-P_{X_0})\,dydz\ldots,$$

получим

$$\int\frac{dP}{dx}\,dxdydz\ldots=\int\frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}\,dydz\ldots$$

Интеграл второго члена содержит только значения $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющие уравнению $L=0$.

Таким же образом найдем

$$\int\frac{dQ}{dy}\,dxdydz\ldots=\int\frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}}\,dxdz\ldots,$$

$$\int\frac{dR}{dz}\,dxdydz\ldots=\int\frac{R\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dz^2}}}\,dxdy\ldots$$

и, следовательно,

$$\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}+\ldots\right)dxdydz\ldots=$$

$$=\int\frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}\,dydz\ldots+\int\frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}}\,dxdz\ldots+\int\frac{R\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dz^2}}}\,dxdy\ldots \quad \text{(A)}$$

Интегралы второго члена этого уравнения должны быть распространены на все значения x, y, z, ..., которые удовлетворяют уравнению $L=0$. Рассмотрим два из этих интегралов, например

$$\int \frac{P\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}\,dydz\ldots \quad \text{и} \quad \int \frac{Q\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}}\,dxdz\ldots$$

Согласно предыдущему параграфу, легко можно удостовериться что их пределы, относящиеся к переменным $z, \ldots$, одни и те же. Кроме того, будем иметь

$$\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy=0$$

для всех элементов этих интегралов, где переменные $z, \ldots$ одни и те же, так что дифференциалы $\frac{dL}{dx}dx$ и $\frac{dL}{dy}dy$ равны с точностью до знака; поэтому, если возьмем со знаком $+$ приращения dx и dy и радикалы $\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}$, $\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}$, то получим

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}=\frac{dx}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}},$$

или, умножая на $dz, \ldots$,

$$\frac{dydz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}=\frac{dxdz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}}.$$

Легко заключить отсюда, что и вообще

$$\frac{dydz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}=\frac{dxdz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}}=\frac{dxdy\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dz^2}}}=\ldots,$$

или, полагая для сокращения $ds = \sqrt{dy^2dz^2\ldots + dx^2dz^2\ldots + dx^2dy^2\ldots}$,

$$\frac{dydz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}} = \frac{dxdz\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dy^2}}} = \frac{dxdy\ldots}{\sqrt{\frac{dL^2}{dz^2}}} = \ldots =$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}}.$$

Вследствие этих равенств уравнение (A) обращается в

$$\int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \ldots\right) dxdydz\ldots =$$

$$= \int \frac{\left(P\frac{dL}{dx} + Q\frac{dL}{dy} + R\frac{dL}{dz} + \ldots\right) ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}}. \qquad \text{(B)}$$

Чтобы с большей легкостью произвести интегрирование дифференциала

$$\frac{\left(P\frac{dL}{dx} + Q\frac{dL}{dy} + R\frac{dL}{dz} + \ldots\right) ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}},$$

можно ввести вместо переменных $x, y, z, \ldots$, связанных уравнением $L = 0$, другие переменные $a, b, \ldots$, независимые друг от друга.

Мы преобразуем с помощью известного приема все элементы $dydz\ldots$, $dxdz\ldots$, $dxdy\ldots$ в элементы, пропорциональные произведению $dadb\ldots$; найдем $dydz\ldots = Adadb\ldots$, $dxdz\ldots = Bdadb\ldots$, $dxdy\ldots = Cdadb\ldots$, причем $A, B, C, \ldots$ — конечные функции от $a, b, c, \ldots$; отсюда имеем

$$ds = dadb\ldots\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + \ldots}.$$

Если, например, мы хотим интегрировать по отношению к переменным $y, z, \ldots$, то должны иметь в виду, что в элементах $dxdz\ldots$, $dxdy\ldots$ нужно взять дифференциал переменной x, рас-

сматривая в первом случае величину y как единственную переменную, во втором — величину z как единственную переменную и т. д.; отсюда будем иметь, что $dxdz\ldots=\frac{dx}{dy}dydz\ldots$, $dxdy\ldots=$ $=\frac{dx}{dz}dydz\ldots$; поэтому

$$ds=dydz\ldots\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}+\frac{dx^2}{dz^2}+\ldots}=dydz\ldots$$

$$\ldots\frac{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}},$$

так что

$$\int\left(\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dz}+\ldots\right)dxdydz=$$

$$=\int\frac{\left(P\frac{dL}{dx}+Q\frac{dL}{dy}+R\frac{dL}{dz}+\ldots\right)dydz}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}. \qquad \text{(C)[6]}$$

Подставим обратно в формулу (B) вместо P, Q, $R,\ldots$ их значения $U\delta x$, $U\delta y$, $U\delta z,\ldots$, тогда получим

$$\int\left[\frac{d(U\delta x)}{dx}+\frac{d(U\delta y)}{dy}+\frac{d(U\delta z)}{dz}+\ldots\right]dxdydz=$$

$$=\int\frac{U\left(\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\ldots\right)ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}}$$

или

$$\int\left[\frac{d(U\delta x)}{dx}+\frac{d(U\delta y)}{dy}+\frac{d(U\delta z)}{dz}+\ldots\right]dxdydz=$$

$$=\int\frac{U\delta L ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{ax^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}},$$

а следовательно,

$$\delta V = \int \frac{U\delta L ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}} + \int DU dxdydz \ldots$$

VIII. Укажем теперь приведения, которые следует произвести в члене $\int DU dxdydz \ldots$ вариации δV, чтобы по мере возможности освободиться от частных производных величины DU под знаком $\int$.

С помощью формулы (B) предыдущего параграфа легко будет заменить интеграл $\int DU dxdydz \ldots$ суммой двух других интегралов $\int W Du dxdydz \ldots$ и $\int \theta ds$, из которых первый, как и $\int DU dxdydz \ldots$, относится ко всем значениям $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющим неравенству $L < 0$, а другой заключает только те значения тех же переменных, которые удовлетворяют уравнению $L = 0$. Функция W не содержит вариации Du; функция θ, наоборот, ее содержит так же как и ее частные производные по переменным $x, y, z, \ldots$; что касается дифференциала ds, то он тот же, что и в предыдущем параграфе, а именно:

$$ds = \sqrt{dy^2 dz^2 \ldots + dx^2 dz^2 \ldots + dx^2 dy^2 \ldots + \ldots}$$

Итак, получаем

$$\int DU dxdydz \ldots = \int W Du dxdydz \ldots + \int \theta ds$$

и, следовательно,

$$\delta V = \int W Du dxdydz \ldots + \int \frac{U\delta L ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}} + \int \theta ds.$$

Интегралы

$$\int W Du dxdydz \ldots \quad \text{и} \quad \int \frac{U\delta L ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}}$$

не подлежат никакому приведению, но интеграл $\int \theta ds$ можно еще привести.

Чтобы произвести приведение для $\int \theta ds$, нужно прежде всего заменить переменные $x, y, z, \ldots$, связанные между собой уравнением $L=0$, другими величинами $a, b, \ldots$, независимыми друг от друга. Число величин $a, b \ldots$ должно быть на единицу меньше числа первоначальных переменных $x, y, z, \ldots$

Рассматривая $x, y, z, \ldots$ как функции $a, b, \ldots$, преобразуем элемент ds в элемент, пропорциональный произведению $dadb \ldots$; имеем:

$$ds = Kdadb \ldots,$$

где K — некоторая конечная функция от $a, b, \ldots$; преобразуем также производные $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \ldots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dxdy} \ldots$ в $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}, \ldots, \frac{d^2Du}{da^2}, \frac{d^2Du}{dadb} \ldots$; мы имеем для этого

$$\frac{dDu}{da} = \frac{dx}{da} \cdot \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{da} \cdot \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{da} \cdot \frac{dDu}{dz} + \ldots,$$

$$\frac{dDu}{db} = \frac{dx}{db} \cdot \frac{dDu}{dx} + \frac{dy}{db} \cdot \frac{dDu}{dy} + \frac{dz}{db} \cdot \frac{dDu}{dz} + \ldots,$$

. . . .

$$\frac{d^2Du}{da^2} = \frac{dx^2}{da^2} \cdot \frac{d^2Du}{dx^2} + 2\frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{da} \cdot \frac{d^2Du}{dxdy} + \ldots,$$

$$\frac{d^2Du}{dadb} = \frac{dx}{da} \cdot \frac{dx}{db} \cdot \frac{d^2Du}{dx^2} + \left(\frac{dx}{da} \cdot \frac{dy}{db} + \frac{dx}{db} \cdot \frac{dy}{da}\right) \frac{d^2Du}{dxdy} + \ldots,$$

. . . .

Но так как предыдущих уравнений по числу недостаточно, чтобы найти из них значения всех производных $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}, \ldots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dxdy}, \ldots$, то некоторые из этих производных останутся неопределенными, а другие будут выражаться через эти последние и через величины $\frac{dDu}{da}, \frac{dDu}{db}, \ldots, \frac{d^2Du}{dadb}, \frac{d^2Du}{da^2}, \ldots$ Вместо того, чтобы рассматривать как неопределенные некоторые

из производных $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ..., удобнее для симметрии ввести такое число линейных функций p, q, r, ... от $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ..., какое будет необходимо для того, чтобы выразить все величины $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ... через p, q, r, ..., $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, ..., $\frac{d^2Du}{da^2}$, $\frac{d^2Du}{dadb}$, ..., и тогда оставим произвольными именно эти функции p, q, r, ...

Но ввести величины p, q, r, ... — все равно, что включить среди переменных a, b, ... одну лишнюю переменную ω; тогда число величин ω, a, b, ... будет равно числу переменных x, y, z, ..., и, рассматривая x, y, z, ... как функции ω, a, b, ..., найдем столько уравнений

$$\frac{dDu}{d\omega}=\frac{dx}{d\omega}\cdot\frac{dDu}{dx}+\frac{dy}{d\omega}\cdot\frac{dDu}{dy}+\frac{dz}{d\omega}\cdot\frac{dDu}{dz}+\ldots,$$

$$\frac{dDu}{da}=\frac{dx}{da}\cdot\frac{dDu}{dx}+\frac{dy}{da}\cdot\frac{dDu}{dy}+\frac{dz}{da}\cdot\frac{dDu}{dz}+\ldots,$$

$$\frac{dDu}{db}=\frac{dx}{db}\cdot\frac{dDu}{dx}+\frac{dy}{db}\cdot\frac{dDu}{dy}+\frac{dz}{db}\cdot\frac{dDu}{dz}+\ldots,$$

. . . .

$$\frac{d^2Du}{d\omega^2}=\frac{dx^2}{d\omega^2}\cdot\frac{d^2Du}{dx^2}+2\frac{dx}{d\omega}\cdot\frac{dy}{d\omega}\cdot\frac{d^2Du}{dxdy}+\ldots,$$

$$\frac{d^2Du}{d\omega da}=\frac{dx}{d\omega}\cdot\frac{dx}{da}\cdot\frac{d^2Du}{dx^2}+\left(\frac{dx}{d\omega}\cdot\frac{dy}{da}+\frac{dx}{da}\cdot\frac{dy}{d\omega}\right)\frac{d^2Du}{dxdy}+\ldots,$$

. . . . ,

сколько необходимо для того, чтобы выразить все производные $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ... через $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, ..., $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, $\frac{d^2Du}{d\omega da}$, ... Но так как переменная ω не существует в действительности, то нужно рассматривать производные $\frac{dx}{d\omega}$, $\frac{dy}{d\omega}$, $\frac{dz}{d\omega}$, ... как величины, которыми можно располагать как угодно для упрощения выражений $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ... Что ка-

сается производных $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, ..., то они должны оставаться вполне неопределенными.

Выразив производные $\frac{dDu}{dx}$, $\frac{dDu}{dy}$, $\frac{dDu}{dz}$, ..., $\frac{d^2Du}{dx^2}$, $\frac{d^2Du}{dxdy}$, ... через $\frac{dDu}{d\omega}$, $\frac{dDu}{da}$, $\frac{dDu}{db}$, ..., $\frac{d^2Du}{d\omega^2}$, $\frac{d^2Du}{d\omega da}$, ..., нужно подставить их значения в интеграл $\int \theta ds = \int \theta K da db \ldots$, после чего можно будет, пользуясь формулой (B) и полагая для сокращения $ds' = \sqrt{db^2 \ldots + da^2 \ldots + \ldots}$, заменить интеграл $\int \theta K da db \ldots$ суммой

$$\int \left(PDu + Q\frac{dDu}{d\omega} + R\frac{d^2Du}{d\omega^2} + \ldots\right) da db \ldots + \int \Phi ds'$$

двух интегралов

$$\int \left(Pdu + Q\frac{dDu}{d\omega} + R\frac{d^2Du}{d\omega^2} + \ldots\right) da db \ldots \text{ и } \int \Phi ds',$$

из которых первый уже не подлежит никакому упрощению, а второй может быть упрощен таким же образом, как и интеграл $\int \theta ds$.

Мы получим

$$\delta V = \int W Du dx dy dz \ldots + \int \frac{U \delta L ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \ldots}} +$$
$$+ \int \left(PDu + Q\frac{dDu}{d\omega} + R\frac{d^2Du}{d\omega^2} + \ldots\right) da db \ldots + \int \Phi ds'.$$

Теперь поступим с интегралом $\int \Phi ds'$ так же, как поступили с $\int \theta ds$; разложим его на два других, из которых один будет окончательно упрощен, а другой еще можно будет упростить; продолжая так и дальше, мы, так сказать, исчерпаем все возможные приведения, которые можно произвести в интегралах, появляющихся один за другим; тогда вариация δV получит вид, пригодный для приложений.

IX. Так как интеграл $\int \theta ds$ предыдущего параграфа относится к значениям $x, y, z, \ldots$, удовлетворяющим уравнению $L=0$, то можно рассматривать одну из этих величин как функцию всех остальных, а эти последние — как независимые друг от друга. Будем, например, рассматривать x как функцию $y, z, \ldots$; тогда, на основании параграфа VII,

$$ds = \frac{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}\, dydz\ldots,$$

и, полагая для краткости

$$\frac{\theta\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}}}=\Psi,$$

найдем

$$\int \theta ds = \int \Psi dydz\ldots$$

Уравнение, относящееся к пределам для $y, z, \ldots$, найдем, исключая x из уравнений $L=0$ и $\frac{dL}{dx}=0$.

Функция Ψ содержит частные производные $\frac{dDu}{dx}, \frac{dDu}{dy}, \frac{dDu}{dz}, \ldots, \frac{d^2Du}{dx^2}, \frac{d^2Du}{dxdy}, \ldots$, взятые по $x, y, z, \ldots$ в предположении, что эти переменные независимы друг от друга; но после дифференцирования нужно подставить в них вместо x его значение, определяемое уравнением $L=0$. Полезно исключить как можно больше производных, о которых идет речь; для этого, рассматривая x как функцию $y, z, \ldots$, получаем

$$\frac{dDu}{dy}=\left(\frac{dDu}{dy}\right)+\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dDu}{dz}=\left(\frac{dDu}{dz}\right)+\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dz},$$

. . . .

$$\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}=\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy},$$

$$\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}=\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dz},$$

. . . .

$$\frac{d^2Du}{dy^2}=\left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dy^2}+\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$\frac{d^2Du}{dydz}=\left(\frac{d^2Du}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)\frac{dx}{dz}+\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dx}{dz}+\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dydz},$$

$$\frac{d^2Du}{dz^2}=\left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right)+2\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)\frac{dx}{dz}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dz^2}+\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dz^2},$$

. . . .

Мы поместили в скобки частные производные величины Du, взятые в предположении, что x, y, z, ... независимы друг от друга.

Из предыдущих уравнений получаем

$$\left(\frac{dDu}{dy}\right)=\frac{dDu}{dy}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dy},$$

$$\left(\frac{dDu}{dz}\right)=\frac{dDu}{dz}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{dx}{dz},$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)=\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}-\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)=\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}-\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dz},$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right)=\frac{d^2Du}{dy^2}-2\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dy^2}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dydz}\right)=\frac{d^2Du}{dydz}-\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}\cdot\frac{dx}{dz}-\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}\cdot\frac{dx}{dy}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dx}{dz}-$$

$$-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dydz},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right)=\frac{d^2Du}{dz^2}-2\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}\cdot\frac{dx}{dz}+\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\frac{dx^2}{dz^2}-\left(\frac{dDu}{dx}\right)\frac{d^2x}{dz^2},$$

. . . .

или, подставляя вместо $\frac{dx}{dy}, \frac{dx}{dz}, \ldots, \frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^2x}{dydz}, \frac{d^2x}{dz^2}, \ldots$ их значения, взятые из уравнения $L=0$,

$$\left(\frac{dDu}{dy}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dDu}{dy}+\frac{dL}{dy}\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}},$$

$$\left(\frac{dDu}{dz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dDu}{dz}+\frac{dL}{dz}\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL}{dx}},$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdy}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL}{dy}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dxdz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{dDu}{dz}\right)}{dz}+\frac{dL}{dz}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)}{\frac{dL}{dx}},$$

. . . .

$$\left(\frac{d^2Du}{dy^2}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2Du}{dy^2}+2\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dy}\cdot\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL^2}{dy^2}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]}{\frac{dL^3}{dx^3}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2L}{dy^2}-2\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dy}\cdot\frac{d^2L}{dxdy}+\frac{dL^2}{dy^2}\cdot\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dydz}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2Du}{dydz}+\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dz}\,\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dy}+\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dy}\cdot\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dL}{dz}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]}{\frac{dL^3}{dx^3}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2L}{dydz}-\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dz}\cdot\frac{d^2L}{dxdy}-\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dy}\cdot\frac{d^2L}{dxdy}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dL}{dz}\cdot\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}},$$

$$\left(\frac{d^2Du}{dz^2}\right)=\frac{\frac{dL}{dx}\left[\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2Du}{dz^2}+2\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dz}\,\frac{d\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{dz}+\frac{d^2L}{dz^2}\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right)\right]}{\frac{dL^3}{dx^3}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{dL^2}{dx^2}\cdot\frac{d^2L}{dz^2}-2\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dL}{dz}\cdot\frac{d^2L}{dxdz}+\frac{dL^2}{dz^2}\cdot\frac{d^2L}{dx^2}\right)\left(\frac{dDu}{dx}\right)}{\frac{dL^3}{dx^3}},$$

. . . .

Подставляя эти значения в

$$\int\theta ds=\int\Psi dydz\ldots$$

и применяя формулу (C) параграфа VII, заменим интеграл $\int \Psi dydz \ldots$ суммой

$$\int \left[PDu + Q\left(\frac{dDu}{dx}\right) + R\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right) + \ldots\right] dydz + \ldots + \int \Phi dz \ldots$$

двух интегралов

$$\int \left[PDu + Q\left(\frac{dDu}{dx}\right) + R\left(\frac{d^2Du}{dx^2}\right) + \ldots\right] dydz \ldots \quad \text{и} \quad \int \Phi dz \ldots,$$

из которых первый упрощен окончательно, а другой может еще подлежать упрощениям. Этот последний относится к переменным $z, \ldots$ Его пределы зависят от уравнения, которое мы получим, исключая x и y из уравнений $L = 0$, $\frac{dL}{dx} = 0$, $\frac{dL}{dy} = 0, \ldots$; наконец, этот интеграл вполне сходен с интегралом $\int \Psi dydz \ldots$ и с ним надо поступать так же, как и с этим последним.

Мы только наметили те преобразования, которые нужно произвести с частью $\int DU dxdydz \ldots$ вариации δV, ибо эти преобразования сводятся к интегрированию по частям и относятся скорее к интегральному исчислению, чем к методу вариаций. В сущности, один из основных принципов этого последнего заключается в том, чтобы по мере возможности заставить исчезнуть производные вариаций, стоящих под знаком интеграла; но вариационное исчисление лишь указывает на эту операцию, предоставляя ее выполнение интегральному исчислению.

ЗАМЕТКА О МЕТОДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Обозначим через φ, $\psi, \ldots$ несколько функций переменных x, y, z, $t, \ldots$ и предположим, что эти функции заданы таким числом дифференциальных уравнений, какое нужно для их полного определения через x, y, z, $t, \ldots$ Уравнения, о которых мы говорим, кроме функций φ, $\psi, \ldots$ и переменных x, y, z, $t, \ldots$, содержат в себе очень малое число α. Требуется выразить φ, $\psi, \ldots$ посредством рядов, расположенных по целым и возрастающим степеням величины α. Для этого, во-первых, заменим число α через переменную величину ω. Необязательно всюду подставлять ω вместо α; можно оставить α там, где это требуется для удобства вычисления. Можно также видоизменить некоторые из предложенных уравнений, лишь бы только изменения исчезали при $\omega = \alpha$. Функции φ, $\psi, \ldots$, вместе с величинами x, y, z, $t, \ldots$, содержат в себе новую переменную ω. Мы будем иметь

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\omega + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\omega + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

где $\varphi_0, \frac{d\varphi_0}{d\omega}, \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}, \ldots, \psi_0, \frac{d\psi_0}{d\omega}, \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}, \ldots$ относятся к $\omega = 0$. Предполагая, что $\frac{d\varphi_0}{d\omega}, \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}, \ldots, \frac{d\psi_0}{d\omega}, \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}, \ldots$ никогда не становятся очень большими, получим, что предыдущие ряды тем более будут сходящимися, чем меньше будет ω; и так как φ, $\psi, \ldots$ ищутся

только для очень малого значения α величины ω, то получим для них быстро сходящиеся ряды [1]

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

. . . .

Во-вторых, продифференцируем относительно ω — и столько раз, сколько необходимо — уравнения между φ, ψ, . . .; x, y, z, t; . . . ω; каждое дифференциальное соотношение будет иметь место одновременно с этими уравнениями; полагая $\omega = 0$, получим необходимые уравнения для определения φ_0, ψ_0, . . . и их производных относительно ω; останется только подставить их в ряды

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\varphi_0}{d\omega^2}\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

$$\psi = \psi_0 + \frac{d\psi_0}{d\omega}\alpha + \frac{d^2\psi_0}{d\omega^2}\frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

. . . .

Метод приближения, который мы только что изложили, известен с очень давнего времени; он самый употребительный. Но, как мне представляется, излагая его, нужно сказать, что весьма малое число, по степеням которого пытаются разложить значения неизвестных, должно быть заменено переменной величиной. Это нужно сказать прежде всего ради точности, ибо при употреблении этого метода дело ведут так, как если бы малая величина была переменной; затем, когда поступают таким образом, получаются две выгоды: первая состоит в объяснении, которое легко дать, почему число произвольных величин, вводимых методом последовательных приближений, больше, чем число их, получающееся из теории дифференциальных уравнений [2]; вторая — важнее: она состоит в том, что с помощью подходящего изменения уравнений можно подготовить себе способы, которые полезно

употребить для ограждения себя от членов, могущих привести к ошибочному приближению.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\alpha y^3,$$

$$\left.\begin{aligned} y&=1 \\ \frac{dy}{dt}&=0 \end{aligned}\right\} \text{ при } t=0$$

в котором α весьма мало и интеграл которого требуется найти с точностью до величин порядка α^2. Заменяя α через ω, будем иметь

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\omega y^3,$$

$$\left.\begin{aligned} y&=1 \\ \frac{dy}{dt}&=0 \end{aligned}\right\}, \text{ когда } t=0;$$

отсюда, дифференцируя и полагая $\omega=0$, получаем

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}+y_0=0,$$

$$\left.\begin{aligned} y_0&=1 \\ \frac{dy_0}{dt}&=0 \end{aligned}\right\}, \text{ когда } t=0;$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+y_1=y^3,$$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=0 \\ \frac{dy_1}{dt}&=0 \end{aligned}\right\} \text{ при } t=0.$$

Для краткости положено $\frac{dy_0}{d\omega}=y_1$; сначала имеем

$$y_0=\cos t,$$

затем

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+y_1=\frac{\cos 3t+3\cos t}{4},$$

что дает

$$y_1=\frac{12t\sin t+\cos t-\cos 3t}{32}$$

и, следовательно,

$$y=\cos t+\alpha\frac{12t\sin t+\cos t-\cos 3t}{32}.$$

Однако это выражение станет в конце концов неточным из-за переменной t, находящейся вне знаков sin и cos.

Чтобы избежать этого неудобства, представим предложенные уравнения в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(1-\frac{3\alpha}{4}\right)y=\frac{\omega}{4}(4y^3-3y),$$

$$\left.\begin{aligned} y&=1\\ \frac{dy}{dt}&=0\end{aligned}\right\},\ \text{когда}\ t=0.$$

Полагая $\omega=\alpha$, мы возвратимся к первоначальным уравнениям. Обозначим для краткости $1-\frac{3\alpha}{4}$ через n^2; получим

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}+n^2y_0=0,$$

$$\left.\begin{aligned} y_0&=1\\ \frac{dy_0}{dt}&=0\end{aligned}\right\},\ \text{когда}\ t=0,$$

и

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+n^2y_1=\frac{1}{4}(4y_0^3-3y_0),$$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=0\\ \frac{dy_1}{dt}&=0\end{aligned}\right\},\ \text{когда}\ t=0,$$

откуда

$$y_0 = \cos nt \quad \text{и} \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} + n^2 y_1 = \frac{\cos 3nt}{4}.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{\cos nt - \cos 3nt}{32n^2},$$

и затем

$$y = \cos nt + \alpha \frac{\cos nt - \cos 3nt}{32n^2},$$

или же

$$y = \cos t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}} + \alpha \frac{\cos t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}} - \cos 3t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}}}{32\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)}.$$

Можно отбросить $\frac{3\alpha}{4}$ в знаменателе [3]. Это выражение y можно сравнить, если угодно, с точным значением этой переменной; чтобы найти последнее, нужно только умножить $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y^3$ на $2dy$ и проинтегрировать, начиная с $t = 0$; сначала найдем

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 1 - \frac{\alpha}{2} - y^2 + \frac{\alpha}{2} y^4 = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(1 - y^2)\left(1 - \frac{\alpha}{2-\alpha} y^2\right).$$

затем, полагая $\frac{\alpha}{2-\alpha} = k^2$, получим

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}\,\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)},$$

откуда

$$dt\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} = -\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}}.$$

Интегрируя от $t = 0$, получим

$$t\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} = \int_y^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2y^2)}},$$

откуда, употребляя обозначения знаменитого кенигсбергского геометра, найдем

$$y = \sin \operatorname{coam} t \sqrt{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos amt \sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 amt \sqrt{1-\frac{\alpha}{2}}}};$$

легко обнаружить, что если разложить надлежащим образом предыдущий интеграл в ряд по степеням α, то два первых члена разложения дадут выше найденный приближенный интеграл, т. е.

$$y = \cos t \sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}} + \alpha \frac{\cos t \sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}} = \cos 3t \sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}}{32};$$

в самом деле, положим для краткости $t\sqrt{1-\frac{\alpha}{2}} = u$ и $\varphi = amu$; мы будем иметь

$$y = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

или же, с точностью до величин порядка α^2,

$$y = \cos\varphi\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi\right) = \cos\varphi + \frac{k^2}{8}(\cos\varphi - \cos 3\varphi).$$

Но так как

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

мы также будем иметь с точностью до величин порядка α^2,

$$u = \left(1+\frac{k^2}{4}\right)\varphi - \frac{k^2}{8}\sin 2\varphi,$$

откуда, полагая для краткости

$$\frac{4}{4+k^2}u = \vartheta,$$

найдем

$$\varphi = \vartheta + \frac{k^2}{8} \sin 2\vartheta,$$

$$\cos \varphi = \cos \vartheta - \frac{k^2}{16} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta);$$

следовательно,

$$y = \cos \vartheta + \frac{k^2}{16} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta),$$

или же, заменяя k^2 через $\frac{\alpha}{2}$, получим

$$y = \cos \vartheta + \frac{\alpha (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta)}{32};$$

что касается величины ϑ, то

$$\vartheta = \frac{4t}{4 + \frac{\alpha}{2 - \alpha}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{3/2}}{1 - \frac{3}{8}\alpha} t = t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}};$$

наконец, следовательно,

$$y = \cos t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}} + \alpha \frac{\cos t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}} - \cos 3t \sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}}}{32}.$$

Почти излишне отмечать, что метод последовательных приближений в таком виде, в каком мы его только что представили, никогда не введет произвольные величины в избыточном количестве. Мы намереваемся применить предыдущие рассмотрения к движению планет вокруг Солнца.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Часто бывает, что для облегчения отыскания кратного интеграла заменяют переменные, по которым должно производиться интегрирование, другими величинами, которые являются функциями первых. Принцип такой замены переменных известен. Мы обязаны им Эйлеру и Лагранжу; но эти великие математики не изложили его, как мне кажется, со всей необходимой ясностью.

Сначала я хочу показать, каким образом наиболее естественное, по-моему, истолкование слов Эйлера и Лагранжа* может повести к совершенно неверному результату; затем я добавлю то, чего недостает в изложении этих великих математиков, чтобы исключить всякую возможность неверных истолкований.

I. Будем рассматривать только двойной интеграл $\int V dx dy$, где V — функция от x и y. Предположим, что x и y — прямоугольные координаты некоторой точки, что интеграл $\int V dx dy$ распространен на все точки внутри фигуры $ABCD$ (рис. 1) и что мы желаем заменить прямоугольные координаты x и y полярными координатами r и p, так что $x = r \cos p$, $y = r \sin p$. С этой целью, подставив в V вместо x и y их предыдущие значения, мы должны будем еще только выразить дифференциальный прямоугольник $dxdy$ через r и p. Пусть $MM'M'''M''$ представляет $dxdy$; чтобы найти площадь $dxdy$, нужно найти $dx = MM'$ и $dy = MM''$. Но

* См. Mémoires de l'Académie de Berlin, 1773.

чтобы перейти от точки M к точке M', следует, не изменяя y, заменить x через $x+dx$, что даст

$$dx = dr\cos p - r\sin p\,dp,$$

$$0 = dr\sin p + r\cos p\,dp,$$

откуда

$$dx = \frac{dr}{\cos p} = -\frac{r\,dp}{\sin p}.$$

Чтобы перейти от точки M к M'', мы должны, наоборот, оставить x неизменным и заменить y через $y+dy$. Но из неизмен-

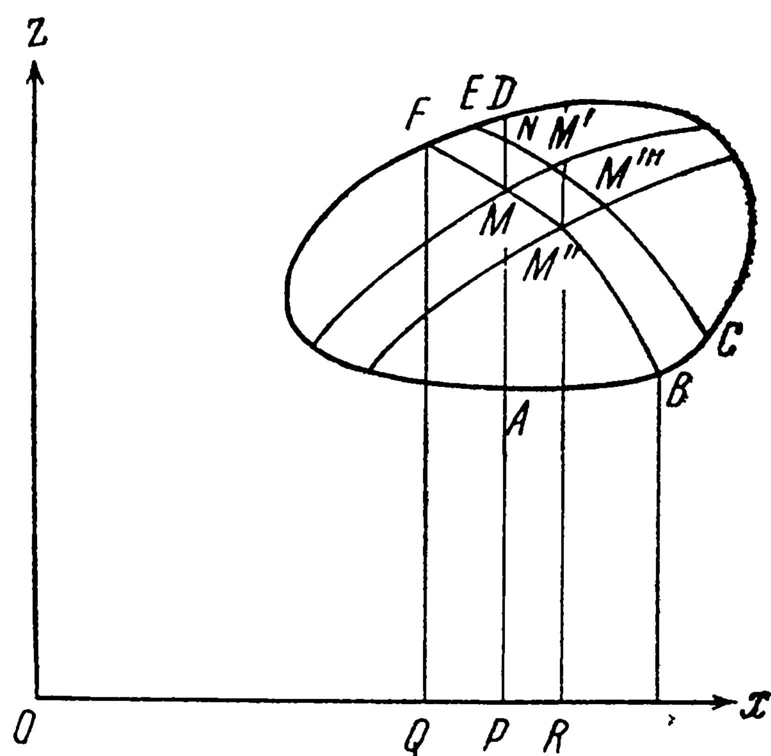


Рис. 1.

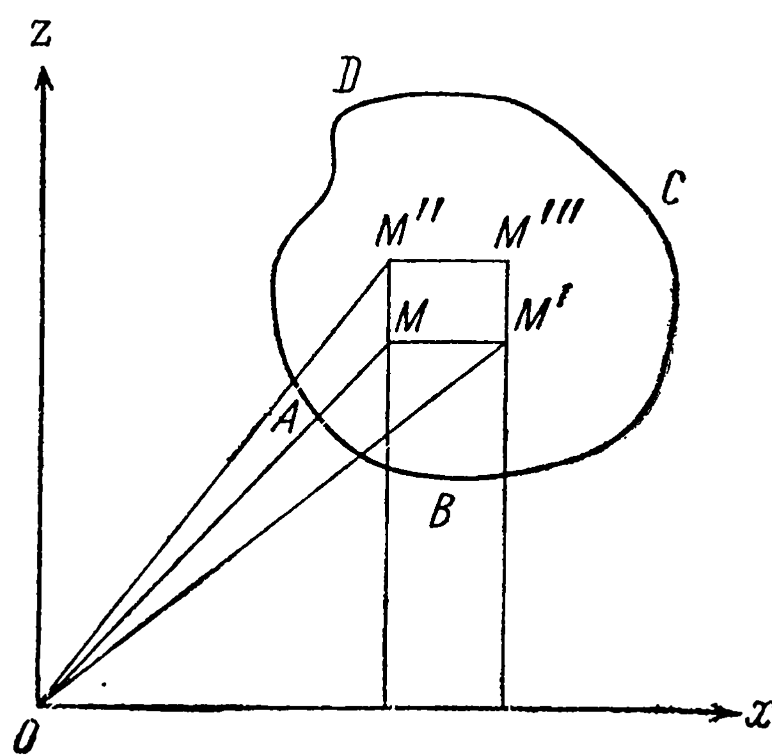


Рис. 2.

ности x не следует, что найденное значение dx равно нулю, ибо всякий переход от точки M к соседней точке требует других приращений x и y и нулю надо будет приравнять иное dx. Таким образом, обозначив через δp и δr дифференциалы, относящиеся к переходу от M к M'', будем иметь

$$0 = \delta r\cos p - r\sin p\,\delta p,$$

$$dy = \delta r\sin p + r\cos p\,\delta p,$$

откуда

$$dy = \frac{\delta r}{\sin p} = \frac{r\,\delta p}{\cos p}$$

и, следовательно,

$$dxdy = \frac{dr\delta r}{\cos p \sin p} = \frac{rdr\delta p}{\cos^2 p} = -\frac{r\delta r dp}{\sin^2 p} = -\frac{r^2 dp\delta p}{\cos p \sin p};$$

ни одно из этих четырех значений не совпадает с тем, которое является известным [1].

II. Рассмотрим снова интеграл $\int V dy dx$, пределы которого заданы произвольно. Пусть интегрирование — сначала по y, а потом по x — представляет трудности, и потому мы хотим заменить переменные x и y другими, u и v, которые представляют собой функции первых; при этом мы находим удобным выполнить интегрирование относительно новых переменных сначала по v, а потом по u.

Поскольку интеграл $\int V dy dx$ есть сумма всех дифференциальных элементов, для его нахождения нужно только сложить все $V dy dx$ [2], отвечающие площади кривой $ABCDEF$ (рис. 2), координатами контура которой являются предельные значения x и y. Порядок, в котором суммируются элементы $V dy dx$, очевидно, не имеет значения для результата. Но, выбрав его соответственным образом, мы можем значительно упростить интегрирование. Именно в различных способах сложения дифференциальных элементов и состоит вся теория замены переменных в кратных интегралах. Если бы, например, мы стали брать интеграл $\int V dy dx$ сначала по y, а затем по x, это свелось бы к тому, что мы сначала сложили бы все элементы $V dy dx$, относящиеся к полосе AD, параллельной оси y и имеющей ширину dx; затем мы сложили бы все, что относится к полосам, подобным AD и которые можно выделить внутри $ABCDEF$. Однако можно получить ту же сумму $\int V dy dx$, складывая элементы $V dy dx$ в любом ином порядке, например сначала все те, которые отвечают бесконечно узкой криволинейной полосе $BCEF$, а затем продолжая суммировать элементы полосами, подобными $BCEF$, пока они все не будут исчерпаны.

Вернемся к преобразованию, которое мы рассматриваем. Так как мы хотим интегрировать сначала по v, а потом по u, то, очевидно, мы хотим сложить сначала все элементы, соответствующие одному и тому же значению u, а затем продолжать суммирование системами элементов, где каждая система соответствует одному и тому же значению u; но значения этой величины для различных систем будут различными. Так как x и y — функции u и v, то, рассматривая все x и y, относящиеся к одному и тому же значению u, мы опишем кривую, которую я обозначу через BF; x, y и v будут различными для различных точек этой кривой, но u остается неизменным. Если мы заставим u изменяться бесконечно мало, дав ему приращение du, и если будем затем искать все точки, соответствующие одному и тому же значению u, равному $u+du$, то мы найдем кривую CE, бесконечно мало отличающуюся от BF. Различным точкам этой кривой будут отвечать различные значения x, y и v.

Будем сначала суммировать все элементы, которые относятся к поверхности $BCEF$; для этого разделим ее на элементы следующим образом. Возьмем точку M, соответствующую некоторому значению v на кривой BF, и точку M', соответствующую тому же значению v на кривой CE. Затем наметим две другие точки M'' и M''', которые соответствуют обе одному и тому же значению v, равному $v+dv$, причем первая находится на кривой BF, вторая — на кривой CE. Мы можем рассматривать четырехугольник $MM'M'''M''$ как элемент поверхности $ABCDEF$. Нет необходимости, чтобы он был равен $dydx$; его величина не играет никакой роли для результатов вычисления.

Обозначив $MM'M'''M''$ через ω, мы можем заменить $Vdydx$ через $V\omega$ и можем рассматривать V как функцию v и u, полученную в результате подстановки этих переменных вместо x и y. Мы будем иметь

$$\int V\,dydx = \int V\omega.$$

Последний интеграл должен быть взят сначала по отношению ко всем значениям v, отвечающим кривой BF, а затем по отно-

шению ко всем различным значениям, какие может принимать u внутри фигуры $ABCDEF$.

Остается найти дифференциальную поверхность ω, что весьма легко, ибо четыре стороны этой поверхности отвечают координатам x, y; $x+\frac{dx}{du}du$, $y+\frac{dy}{du}du$, $x+\frac{dx}{dv}dv$, $y+\frac{dy}{dv}dv$, $x+\frac{dx}{du}\times$ $\times du+\frac{dx}{dv}dv$, $y+\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv$, а отсюда заключаем, что ω представляет собой параллелограмм. Следовательно, на основании теоремы элементарной геометрии, имеем

$$\omega=i\left(\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}\right)dvdu,$$

где i обозначает ± 1 для того, чтобы ω всегда было положительным. Получим

$$\int Vdydx=\int V\left(\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}\right)idvdu -$$

уже известный результат.

Вот формулировка упомянутой нами теоремы из геометрии: если обозначить через x, y; $x+p, y+q$; $x+p'$, $y+q'$ координаты вершин каких-либо трех из четырех углов параллелограмма, отнесенные к его плоскости, то площадь параллелограмма выразится через $i(pq'-qp')$, причем величина $i=\pm 1$ должна иметь знак, при котором $i(pq'-qp')$ становится положительным [3].

III. Предыдущие соображения было бы легко распространить на тройные интегралы и прийти к уже известным результатам. Но эти же соображения, по причине геометрической теоремы, которую мы с ними связали, не будут применимы к преобразованию интегралов, относящихся более чем к трем переменным; поэтому, а также чтобы пояснить обычно применяемые методы, мы преобразуем интеграл $\int Vdydx$ иным способом.

Так как сначала дело идет о том, чтобы взять сумму всех $Vdydx$, относящихся к площади внутри полосы $BCEF$, я буду брать эту сумму по обычному способу, интегрируя по y от $y=PM$ до $y=PN$, а затем по x от $x=OQ$ до $x=OR$. Но интегрирование

по y между указанными выше пределами сводится к умножению на $MN=dy$, так что останется только интегрировать по x; имеем $MN=dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv$, и в то же время нужно положить $0=\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv$, ибо дело идет о переходе от точки M к точке N. Отсюда, исключая dv, находим

$$dy=\frac{\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}\right)du}{\frac{dx}{dv}}.$$

Таким образом, результат интегрирования по y будет

$$\frac{V\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}\right)dudx}{\frac{dx}{dv}}.$$

Теперь нужно интегрировать по x; однако удобнее ввести вместо x переменную v и взять интеграл от v, соответствующего точке F, до v, относящегося к точке B. Но так как $dx=\frac{dx}{dv}dv$, ибо u остается неизменным для всех точек кривой FB, то будем иметь

$$\int V\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dx}{du}\cdot\frac{dy}{dv}\right)dvdu$$

для суммы элементов, составляющих полосу $BCEF$. Останется лишь интегрировать эту сумму по u между соответствующими пределами, чтобы сложить все элементы, относящиеся ко всей поверхности $ABCDEF$.

Указанное выше преобразование легко можно сделать независимым от представлений о кривых и распространить на любое число интегралов. Вместо того чтобы проводить линии BF и CE, мы могли бы сказать, что нужно найти сумму элементов, которые относятся к значениям u, заключенным между u и $u+du$; сначала интегрируют по одной из переменных x или y, например по y, считая x постоянным. Интеграл берут между пределами y и $y+dy$,

где $y+dy$ соответствует крайнему значению u, т. е. $u+du$; но поскольку x постоянно, имеем $\frac{dx}{du}du+\frac{dx}{dv}dv=0$, так что dv бесконечно мало. Следовательно,

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv=\frac{\left(\frac{dx}{dv}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dx}{du}\right)du}{\frac{dx}{dv}}$$

и т. д. Мы предпочли воспользоваться геометрическими соображениями для большей наглядности, ибо предназначали это рассуждение для лиц, не имеющих навыка в математическом анализе[4].

IV. Пусть мы желаем узнать, во что обратится интеграл $\int\varphi(x, y)\,dydx$, если в нем заменить x и y соответственно через X и Y, причем X и Y — функции от x и y. Ясно, что $\varphi(x, y)$ обратится в $\varphi(X, Y)$, а во что бы ни обратилось $dydx$, я всегда могу заменить его через $dXdY$; поэтому наш интеграл обратится в $\int\varphi(X, Y)\,dYdX$ при условии, что мы будем интегрировать по X и Y в соответствующих пределах. Но чтобы избавиться от отыскания этих пределов, нам достаточно преобразовать переменные X и Y, выразив их через x и y, а это сведется к замене $dXdY$ через $\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}\right)dxdy$, так что интеграл $\int\varphi(x, y)\,dxdy$, после замены x через X, а y через Y, превратится в

$$\int\varphi(X, Y)\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dx}\right)dxdy,$$

причем пределы x и y будут те же, что и в $\int\varphi(x, y)\,dxdy$.

Изложенное выше решение дает возможность получить много результатов, относящихся к интегрированию функций от двух переменных; оно заключает также — как частный случай — нахождение вариации кратного интеграла. Для этой последней цели нужно только заменить X и Y соответственно через $x+\delta x$ и $y+\delta y$ и вычесть $\int\varphi(x, y)\,dxdy$ из результата; а если бы $\varphi(x, y)$ содержала переменную z, рассматриваемую как функцию от x, y, и

производные $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ... этой переменной, то нужно было бы в функции $\varphi(X, Y)$ заменить z через Z и $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, ... через $\frac{dZ}{dx}$, $\frac{dZ}{dy}$, ... или через

$$\frac{\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dx}-\frac{dY}{dx}\cdot\frac{dZ}{dy}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}, \qquad \frac{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dZ}{dy}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}}, \ldots$$

Что касается элемента $dxdy$, то бесполезно искать, во что он превратится при замене x и y через X и Y, ибо я всегда могу рассматривать $dXdY$ как дифференциальный элемент после замены; но если бы мы желали проследить, что станет с элементом $dxdy$ в то время, как x и y изменяются и обращаются в X и Y, то мы нашли бы, что он обратится в $\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}-\frac{dX}{dy}\cdot\frac{dY}{dx}\right)dxdy$.

ЗАМЕТКА О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Все знают, каким образом Лагранж проинтегрировал уравнение

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+S\frac{dy}{dx}+Ty=X.$$

Предполагая известными n частных функций $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{d^nz}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\cdots+S\frac{dz}{dx}+Tz=0,$$

нужно, согласно этому великому геометру, положить

$$y=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3+\cdots+C_nz_n$$

и рассматривать величины C как определяемые уравнениями

$$z_1dC_1+z_2dC_2+z_3dC_3+\cdots+z_ndC_n=0,$$

$$\frac{dz_1}{dx}dC_1+\frac{dz_2}{dx}dC_2+\frac{dz_3}{dx}dC_3+\cdots+\frac{dz_n}{dx}dC_n=0,$$

$$\frac{d^2z_1}{dx^2}dC_1+\frac{d^2z_2}{dx^2}dC_2+\frac{d^2z_3}{dx^2}dC_3+\cdots+\frac{d^2z_n}{dx^2}dC_n=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-2}z_1}{dx^{n-2}}dC_1+\frac{d^{n-2}z_2}{dx^{n-2}}dC_2+\frac{d^{n-2}z_3}{dx^{n-2}}dC_3+\cdots+\frac{d^{n-2}z_n}{dx^{n-2}}dC_n=0,$$

$$\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}dC_1+\frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}}dC_2+\frac{d^{n-1}z_3}{dx^{n-1}}dC_3+\cdots+\frac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}}dC_n=Xdx.$$

Но ни Лагранж, ни кто-нибудь другой, насколько я знаю, не заметил, что общий знаменатель всех dC представляется в весьма простой форме, которую полезно выявить. Для этого обозначим через Δ знаменатель, о котором идет речь, и положим

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{(z_1)X}{\Delta},$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{(z_2)X}{\Delta},$$

$$\frac{dC_3}{dx} = \frac{(z_3)X}{\Delta},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dC_n}{dx} = \frac{(z_n)X}{\Delta};$$

мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&z_1(z_1) + z_2(z_2) + z_3(z_3) + \cdots + z_n(z_n) = 0,\\
&\frac{dz_1}{dx}(z_1) + \frac{dz_2}{dx}(z_2) + \frac{dz_3}{dx}(z_3) + \cdots + \frac{dz_n}{dx}(z_n) = 0,\\
&\frac{d^2z_1}{dx^2}(z_1) + \frac{d^2z_2}{dx^2}(z_2) + \frac{d^2z_3}{dx^2}(z_3) + \cdots + \frac{d^2z_n}{dx^2}(z_n) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{n-2}z_1}{dx^{n-2}}(z_1) + \frac{d^{n-2}z_2}{dx^{n-2}}(z_2) + \frac{d^{n-2}z_3}{dx^{n-2}}(z_3) + \cdots + \frac{d^{n-2}z_n}{dx^{n-2}}(z_n) = 0,\\
&\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}}(z_1) + \frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}}(z_2) + \frac{d^{n-1}z_3}{dx^{n-1}}(z_3) + \cdots + \frac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}}(z_n) = \Delta.
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Дифференцируя последнее из этих уравнений и обращая внимание на то, что в силу свойств величин (z_1), (z_2), (z_3), ..., (z_n) мы имеем

$$\frac{d^{n-1}z_1}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d(z_1)}{dx} + \frac{d^{n-1}z_2}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d(z_2)}{dx} + \frac{d^{n-1}z_3}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d(z_3)}{dx} +$$

$$+ \cdots + \frac{d^{n-1}z_n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d(z_n)}{dx} = 0,$$

получим

$$\frac{d\Delta}{dx}=\frac{d^n z_1}{dx^n}(z_1)+\frac{d^n z_2}{dx^n}(z_2)+\frac{d^n z_3}{dx^n}(z_3)+\cdots+\frac{d^n z_n}{dx^n}(z_n).$$

Если теперь подставим вместо величин $\frac{d^n z}{dx^n}$ их значения, доставляемые уравнением порядка n, которому должны удовлетворять величины z, и если примем во внимание уравнения (А), то найдем

$$\frac{d\Delta}{dx}+P\Delta=0,$$

откуда

$$\Delta=ae^{-\int P dx},$$

где a — произвольная постоянная. Это значение Δ, по-видимому, заслуживает того, чтобы о нем сказать.

Мы затем будем иметь

$$\frac{dC_1}{dx}=\frac{(z_1)\,Xe^{\int P dx}}{a},$$

$$\frac{dC_2}{dx}=\frac{(z_2)\,Xe^{\int P dx}}{a},$$

$$\frac{dC_3}{dx}=\frac{(z_3)\,Xe^{\int P dx}}{a},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dC_n}{dx}=\frac{(z_n)\,Xe^{\int P dx}}{a}.$$

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. Изобретатели анализа бесконечно малых не рассмотрели всех случаев интегрирования рациональных дробей. *Ньютон* применил для этого интегрирования разложение в ряды, а *Лейбниц* — разложение на простые дроби, т. е. на дроби, имеющие знаменателями вещественные множители знаменателя заданной дроби, линейные или второй степени; эти множители могут возвышаться во вторую, третью или более высокую степень. Однако *Лейбниц* не исчерпал всех случаев множителей второй степени; к тому же его метод разложения на простые дроби при помощи неопределенных коэффициентов кропотлив и слишком сложен. *Иван Бернулли* усовершенствовал это разложение, и ему мы обязаны способом интегрирования, который с некоторыми упрощениями и видоизменениями вошел во все курсы интегрального исчисления. Этот метод применялся и применяется до сих пор во всех случаях, когда приходится интегрировать рациональную дробь. Я подумал, что его можно упростить в некоторых отношениях, а именно, поскольку алгебраическая часть интеграла может быть получена без разложения на простые дроби, я и предлагаю для ее нахождения метод более удобный, чем применение упомянутого разложения. Я говорю — алгебраическая часть, ибо известно, что интеграл рациональной дроби является частью алгебраическим, частью логарифмическим и круговым. Эта последняя часть сводится к интегралу другой рациональной дроби, которую мы находим без труда и которая проще предложенной.

То, что мы хотим сказать об интегрировании рациональных функций, можно было бы изложить в более простой форме, если бы

мы пожелали воспользоваться тем, что известно по этому вопросу; но мы полагали, что должны рассмотреть его независимо от каких-нибудь известных результатов, ибо в противном случае предлагаемый нами метод не являлся бы полной заменой метода *Ивана Бернулли*.

II. Обозначим через x независимую переменную и через

$$\frac{N}{M}$$

рациональную функцию этой переменной; N и M — две целых функции, без общих множителей, причем можно предположить, что степень второй выше, чем степень первой.

Посмотрим сначала, может ли интеграл

$$\int \frac{N}{M}\, dx$$

быть алгебраическим? И должны ли для этого выполняться какие-нибудь условия; какого характера эти условия?

Известно, и это нетрудно доказать, что рассматриваемый интеграл, чтобы быть алгебраическим, должен быть рациональным, ибо дифференциал иррациональной функции сам иррационален. Таким образом, выяснить, когда интеграл

$$\int \frac{N}{M}\, dx$$

является алгебраическим, это значит найти условия, при которых можно положить

$$\int \frac{N}{M}\, dx = \frac{X}{P},$$

где X и P целые функции без общих множителей, и легко убедиться, что степень X должна быть меньше степени P [1].

Дифференцируя, получим уравнение

$$\frac{N}{M} = \frac{P\frac{dX}{dx} - \frac{dP}{dx}X}{P^2};$$

левая часть его несократима по предположению, а правая сократима лишь в том случае, когда P и $\frac{dP}{dx}$ имеют общие множители, ибо числитель

$$P\frac{dX}{dx}-\frac{dP}{dx}X$$

не может делиться ни на один множитель функции P, если только на него не делится $\frac{dP}{dx}X$, т. е. если только P и $\frac{dP}{dx}$ не имеют общих множителей, поскольку X и P не имеют таковых. Но функция P неизвестна, а потому нельзя предрешить, имеют ли она и ее производная $\frac{dP}{dx}$ общие множители или нет. Однако предположение о том, что P и $\frac{dP}{dx}$ имеют общий множитель или делитель, очевидно, заключает в себе и противоположное предположение, ибо если бы оправдалось это последнее, то делитель, о котором идет речь, был бы единицей. Итак, допуская, что P и $\frac{dP}{dx}$ имеют общий множитель P_1, мы допускаем наиболее общее предположение, так как P_1 свелось бы к единице, если функции P и $\frac{dP}{dx}$ — первые между собой.

Положим

$$P=QP_1,$$

$$\frac{dP}{dx}=RP_1,$$

где P_1 — общий наибольший делитель P и $\frac{dP}{dx}$; полиномы Q и R не будут иметь общих множителей. Заменим P и $\frac{dP}{dx}$ их предыдущими значениями [2] и сократим множитель P_1, общий числителю и знаменателю; мы получим уравнение

$$\frac{N}{M}=\frac{Q\frac{dX}{dx}-RX}{QP},$$

правая часть которого уже не допускает никакого приведения; она несократима, как и левая. Эта правая часть представляет производную дроби

$$\frac{X}{P},$$

и мы заключаем отсюда, что при дифференцировании рациональной дроби она приобретает в знаменателе множитель Q, являющийся произведением всех простых делителей, которые знаменатель имел до дифференцирования. Действительно, из теории общего наибольшего делителя следует, что функция Q содержит все простые делители функции P, причем каждый встречается в ней лишь один раз. Отсюда вытекает, что произведение QP будет заключать те же делители, что и P, но при этом те, которые входили в P один, два, три и т. д. раз, будут входить в QP два, три, четыре и т. д. раз. Итак, знаменатель производной от рациональной функции может содержать только кратные множители, и, следовательно, невозможно получить алгебраический интеграл для дроби, знаменатель которой содержал бы простые множители, входящие в него лишь в первой степени. Таким образом, первым условием алгебраической интегрируемости рациональной дроби является требование, чтобы знаменатель этой дроби содержал лишь кратные множители.

Если знаменатель M заданной дроби удовлетворяет указанному условию, то уравнение

$$\frac{N}{M}=\frac{Q\frac{dX}{dx}-RX}{QP}$$

обе части которого несократимы, даст сначала

$$QP=M,$$

что послужит для определения как функции P, так и многочленов Q и R; далее будем иметь

$$Q\frac{dX}{dx}-RX=N,$$

и это последнее равенство составит второе условие алгебраической интегрируемости [3] дроби

$$\frac{N dx}{M},$$

условие, которое в случаях, взятых наудачу, редко окажется выполненным.

Мы сказали, что функции P, Q и R определяются посредством уравнения

$$QP = M.$$

Действительно, если вспомним основы теории целых функций, то убедимся, что P — наибольший делитель, общий M и $\frac{dM}{dx}$; стало быть, P найдется обычными приемами; далее получим Q делением M на P. Чтобы найти R, обозначим через U частное от деления производной $\frac{dM}{dx}$ на P; будем иметь

$$\frac{dM}{dx} = UP,$$

с другой стороны,

$$\frac{dM}{dx} = Q\frac{dP}{dx} + P\frac{dQ}{dx};$$

следовательно,

$$\left(U - \frac{dQ}{dx}\right)P = Q\frac{dP}{dx},$$

или, принимая во внимание уравнения $P = QP_1$, $\frac{dP}{dx} = RP_1$,

$$\left(U - \frac{dQ}{dx}\right)P = QRP_1 = RP;$$

значит,

$$R = U - \frac{dQ}{dx}.$$

Можно также, зная P, искать наибольший делитель P_1, общий P и $\frac{dP}{dx}$; будем иметь тогда

$$Q=\frac{P}{P_1}, \quad R=\frac{1}{P_1}\cdot\frac{dP}{dx}.$$

Из предыдущего следует, что когда рациональная дробь интегрируема алгебраически, то знаменатель P ее интеграла есть наибольший делитель, общий знаменателю предложенной дроби и производной этого последнего. Что касается числителя предложенной дроби, то он представлен в виде

$$Q\frac{dX}{dx}-\left(U-\frac{dQ}{dx}\right)X$$

или

$$\frac{d.QX}{dx}-UX\ [^4],$$

где X — функция, степень которой ниже степени P, а функции Q и U получаются из данного знаменателя, как было только что разъяснено [5].

III. Каков бы ни был знаменатель рациональной дроби, за исключением одного только случая [6], всегда можно будет найти бесчисленное множество числителей, которые делают эту дробь интегрируемой алгебраически. Действительно, чтобы удовлетворить первому условию интегрируемости, т. е. тому, которое относится к знаменателю, — если оно не удовлетворяется само собой, — нужно лишь предположить, что числитель делится на произведение всех простых множителей знаменателя, входящих в него только в первой степени; в таком случае в знаменателе останутся лишь его кратные множители, а то, что останется от числителя, будет целой функцией, коэффициенты которой могут быть выбраны по нашему усмотрению. Мы сможем поэтому распорядиться ими так, чтобы обеспечить интегрируемость.

Чтобы рассмотреть вопрос ближе, возьмем дробь

$$\frac{N}{M},$$

знаменатель которой предполагается заданным по произволу, а неизвестный числитель, который должен только иметь степень ниже степени знаменателя, подлежит определению под условием, чтобы интеграл

$$\int \frac{N}{M}\, dx$$

был алгебраическим.

Обозначим через q произведение всех тех простых множителей знаменателя M, которые входят в него лишь в первой степени. Обозначим через L частное

$$\frac{M}{q}.$$

Функция L будет содержать лишь кратные множители, т. е. каждый из ее простых множителей будет входить в нее во второй, третьей, четвертой или более высокой степени.

Если подставим вместо M значение qL, интеграл

$$\int \frac{N}{M}\, dx$$

обратится в

$$\int \frac{N}{qL}\, dx,$$

и если он должен быть алгебраическим, то необходимо прежде всего, чтобы N делилось на q, т. е.

$$N = qK,$$

где K — целая функция, так что дробь, подлежащая интегрированию, приведется к

$$\frac{K}{L}\, dx.$$

Условие интегрируемости, относящееся к знаменателю, выполнено, поскольку L заключает лишь кратные множители; чтобы найти знаменатель интеграла

$$\int \frac{K}{L}\, dx,$$

нужно отыскать общий наибольший делитель функций L и $\frac{dL}{dx}$, ибо мы видели, что этот делитель и есть искомый знаменатель. Обозначим его через P. Далее, чтобы удовлетворить второму условию интегрируемости, относящемуся к числителю, нужно только взять, согласно предыдущему параграфу,

$$K=\frac{d.Q'X}{dx}-R'X,$$

положив

$$\frac{L}{P}=Q', \quad \frac{1}{P}\cdot\frac{dL}{dx}=R' \text{ [7]}.$$

Что касается величины X, то она является целой функцией, степень которой ниже степени P, с любыми коэффициентами. Затем, согласно тому же предыдущему параграфу, мы будем иметь

$$\int\frac{K}{L}\,dx=\frac{X}{P}.$$

Зная X, получим для искомого числителя N следующее значение:

$$N=q\left(\frac{d.Q'X}{dx}-R'X\right)=qQ'\frac{dX}{dx}-q\left(R'-\frac{dQ'}{dx}\right)X.$$

Итак, каков бы ни был знаменатель M дроби

$$\frac{N}{M},$$

за исключением одного случая, мы можем, положив

$$N=q\left(\frac{d.Q'X}{dx}-R'X\right),$$

сделать выражение $\frac{Ndx}{M}$ интегрируемым алгебраически и будем иметь

$$\int\frac{Ndx}{M}=\int\frac{q\left(\frac{d.Q'X}{dx}-R'X\right)}{M}\,dx=\frac{X}{P}.$$

Числитель интегрируемой дроби

$$\frac{q\left(\frac{d.Q'X}{dx}-R'X\right)}{M}$$

не вполне определен, поскольку он заключает функцию X, которую можно взять произвольно, с тем лишь ограничением, что степень этой функции должна быть ниже, чем степень P; иначе степень числителя

$$q\left(\frac{d.Q'X}{dx}-R'X\right)$$

могла бы превзойти степень знаменателя, что не согласуется с нашим предположением.

Нелишне будет заметить, что делитель P, общий L и $\frac{dL}{dx}$, является в то же время наибольшим общим делителем M и $\frac{dM}{dx}$, в чем можно убедиться на основании того, что говорится по этому вопросу в теории целых функций. Впрочем, в этом можно удостовериться и следующим образом. Продифференцируем уравнение

$$M=qL=qQ'P;$$

мы будем иметь

$$\frac{dM}{dx}=\frac{dq}{dx}L+q\frac{dL}{dx},$$

или, вследствие того, что $L=Q'P$, $\frac{dL}{dx}=R'P$,

$$\frac{dM}{dx}=\left(Q'\frac{dq}{dx}+qR'\right)P.$$

Но так как $Q'\frac{dq}{dx}+qR'$ не имеет общих множителей ни с q, ни с Q', то общим делителем M и $\frac{dM}{dx}$ может быть только P.

Положим

$$M=QP,$$

$$\frac{dM}{dx}=RP:$$

мы будем иметь

$$qQ' = Q,$$

$$\frac{dq}{dx} Q' + qR' = R;$$

но

$$\frac{dq}{dx} Q' = \frac{dQ}{dx} - q \frac{dQ'}{dx},$$

следовательно,

$$q\left(R' - \frac{dQ'}{dx}\right) = R - \frac{dQ}{dx},$$

а потому числитель

$$q\left(\frac{d\,Q'X}{dx} - R'X\right)$$

или

$$qQ' \frac{dX}{dx} - q\left(R' - \frac{dQ'}{dx}\right) X$$

дроби, интегрируемой алгебраически, может быть представлен в виде

$$Q\frac{dX}{dx} - \left(R - \frac{dQ}{dx}\right) X$$

или в виде

$$\frac{d.QX}{dx} - RX,$$

и мы будем иметь

$$\int \frac{\frac{d.QX}{dx} - RX}{M} dx = \frac{X}{P}.$$

Мы говорили, что из сказанного выше следует исключить один случай. Этот случай — тот, когда функция M не содержит кратных множителей — ни вещественных, ни мнимых. Ибо тогда N, которое должно делиться на всю функцию M и степень которого ниже степени этой функции, может быть только нулем, так что дробь, подлежащая интегрированию, исчезает. Но во всех слу-

чаях, когда M содержит кратные множители, легко найти отличный от нуля числитель N, который сделает дробь

$$\frac{N}{M}\,dx$$

интегрируемой алгебраически. Нужно будет только отыскать, согласно сказанному выше, общий наибольший делитель P функций M и $\frac{dM}{dx}$ и частные Q и R от деления тех же функций на P; мы получим сразу

$$N=\frac{d.QX}{dx}-RX$$

$$\int\frac{\frac{d.QX}{dx}-RX}{M}\,dx=\frac{X}{P},$$

что и является наиболее простым решением поставленного вопроса.

IV. Вернемся к случаю, когда числитель N и знаменатель M заданы и нужно найти или, вернее, упростить, насколько возможно, интеграл

$$\int\frac{N}{M}\,dx.$$

Никакое упрощение невозможно, если функция M и ее производная $\frac{dM}{dx}$ не имеют общих множителей [8]. Поэтому мы допустим что имеется делитель P, общий этим двум функциям, и положим

$$M=QP,$$

$$\frac{dM}{dx}=RP,$$

где R и Q, будучи целыми функциями, не имеют общих множителей.

Если бы N имело вид

$$\frac{d.QX}{dx}-RX,$$

т. е. если бы возможно было найти X, доставляющее указанное представление

$$N = \frac{d.QX}{dx} - RX,$$

то мы получили бы немедленно

$$\int \frac{N}{M} dx = \frac{X}{P}.$$

Но заведомо невозможно, чтобы N всегда было представлено в указанном виде, ибо прежде всего выражение

$$\frac{d.QX}{dx} - RX$$

делится на произведение всех тех простых множителей функции M, которые входят в нее лишь однажды; стало быть, N должно было бы также делиться на упомянутое произведение, а это невозможно, ибо N и M не должны иметь общих множителей. Далее, даже в случае, когда M содержит только кратные множители, вообще говоря, выражение

$$\frac{d.QX}{dx} - RX$$

не может представлять функцию, подчиненную только тому условию, чтобы ее степень была ниже степени функции M [9]; между тем это было бы необходимо для интегрируемости дроби

$$\frac{Ndx}{M},$$

когда N ограничено только своей степенью.

Мы видели в предыдущем параграфе, что выражение

$$\frac{d.QX}{dx} - RX,$$

или, что то же, выражение

$$Q\frac{dX}{dx} - \left(R - \frac{dQ}{dx}\right)X,$$

делится на произведение тех простых множителей M, которые входят в него в первой степени. Но сейчас мы вернемся к этому.

Сравнивая два выражения RP и $\frac{d.QP}{dx}$ для производной $\frac{dM}{dx}$, мы находим сначала

$$\left(R-\frac{dQ}{dx}\right)P=Q\frac{dP}{dx},$$

а затем, обозначая через P_1 общий наибольший делитель P и $\frac{dP}{dx}$ и полагая

$$P=Q_1P_1,$$
$$\frac{dP}{dx}=R_1P_1,$$

получим, вместо предыдущего уравнения,

$$\left(R-\frac{dQ}{dx}\right)Q_1=QR_1;$$

отсюда следует, поскольку Q_1 и R_1 первые между собой, что Q делится на Q_1. Пусть соответственно

$$Q=qQ_1;$$

это даст нам

$$R-\frac{dQ}{dx}=qR_1$$

и далее

$$\frac{d.QX}{dx}-RX=Q\frac{dX}{dx}-\left(R-\frac{dQ}{dx}\right)X=qQ_1\frac{dX}{dx}-qR_1X. \qquad \text{(A)}$$

Очень легко видеть, что q есть произведение простых множителей, которые M содержит лишь по одному разу. Мы найдем это произведение, так же как и величины Q_1 и R_1, после того, как получим Q и R. Достаточно будет найти общий наибольший делитель Q и $R-\frac{dQ}{dx}$, ибо q, очевидно, и есть этот делитель, а функции Q_1 и R_1 — частные от деления Q и $R-\frac{dQ}{dx}$ на q.

Поскольку мы не можем предположить

$$N = \frac{d.QX}{dx} - RX,$$

положим, на что мы имеем право,

$$N = \frac{d.QX}{dx} - RX + U,$$

где U — целая функция; мы будем иметь

$$\int \frac{N}{M} dx = \frac{X}{P} + \int \frac{U}{M} dx.$$

Степени полиномов N и $\frac{d.QX}{dx} - RX$ ниже степени полинома M, а потому и степень U также должна быть ниже ее; но при одном только этом условии интеграл

$$\int \frac{U}{M} dx$$

был бы нисколько не проще, чем интеграл

$$\int \frac{N}{M} dx,$$

и мы ничего не выиграли бы, придав последнему вид

$$\frac{X}{P} + \int \frac{U}{M} dx;$$

нужно, следовательно, чтобы U удовлетворяло еще другим условиям, в силу которых дробь

$$\frac{U}{M}$$

упростилась бы насколько возможно. Упрощение, о котором идет речь, имело бы место, если бы U и M имели общие множители, ибо, сокращая их, мы понизили бы степень знаменателя, и это было бы настоящим упрощением. Небольшое размышление застав-

ляет признать, что, кроме указанного понижения, нет никаких иных способов упростить дробь

$$\frac{U}{M};$$

но, повторяем, понижение степени знаменателя представляет уже весьма значительное упрощение. Действительно, трудность интегрирования рациональной дроби зависит главным образом от сложности ее знаменателя.

Итак, к уравнению

$$N = \frac{dQX}{dx} - RX + U$$

нужно прибавить условие, чтобы функции M и U имели общий множитель. Степень и форма этих множителей должны быть таковы, чтобы уравнение, о котором идет речь, могло иметь место и чтобы в то же время интеграл

$$\int \frac{U}{M} dx$$

уже не допускал какого-либо упрощения.

Условие существования общего множителя у функций M и U, т. е. у функций M и $RX - \frac{dQX}{dx} + N$, должно быть удовлетворено за счет неизвестной X, ибо две другие величины Q и R предполагаются определенными из предыдущего.

Обозначим через Z этот множитель и положим

$$M = HZ,$$

$$U = RX - \frac{dQX}{dx} + N = YZ.$$

Ясно, что степень множителя Z должна быть настолько высокой, насколько позволяет неизвестная X, ибо чем выше степень этого множителя, тем проще будет дробь

$$\frac{U}{M} = \frac{Y}{H},$$

которую еще предстоит интегрировать.

С другой стороны, необходимо, чтобы функция H, частное от деления M на Z, не содержала кратных множителей, иначе интеграл

$$\int \frac{U}{M}\,dx = \int \frac{Y}{H}\,dx$$

мог бы быть приведен к более простому.

Итак, мы должны удовлетворить двум только что поставленным условиям.

Но, согласно тому, что известно о делимости целых функций, вообще говоря, нельзя приписать выражению

$$RX - \frac{d.QX}{dx} + N$$

делитель Z более высокого порядка, чем порядок неизвестной X, увеличенный на одну единицу [10]. Делитель менее высокой степени не определял бы полностью этой неизвестной и не удовлетворял бы первому из наших двух условий; делитель более высокой степени, если на него должна делиться функция

$$RX - \frac{d.QX}{dx} + N,$$

требовал бы условий, которые, разумеется, выполнялись бы весьма редко, ибо упомянутая функция вообще не будет делиться на множитель, степень которого на две или более единиц выше, чем степень X.

Поскольку в наших интересах, чтобы функция Z была как можно более высокой степени, а с другой стороны,

$$RX - \frac{d.QX}{dx} + N$$

должно делиться на нее без какого-либо добавочного условия, мы можем лишь предположить, что она той же степени, как и функция P, являющаяся наибольшим общим делителем M и $\frac{dM}{dx}$, ибо степень этого делителя превышает на одну только единицу степень X.

Так как функция Z — той же степени, что и общий наибольший делитель M и производной $\frac{dM}{dx}$, и, кроме того, частное

$$\frac{M}{Z}$$

не должно содержать кратных множителей, то отсюда следует, что Z и может быть только этим общим наибольшим делителем M и $\frac{dM}{dx}$, т. е.

$$Z=P;$$

стало быть,

$$H=Q,$$

$$U=q\left(R_1X-Q_1\frac{dX}{dx}\right)+N=PY,$$

$$\frac{U}{M}=\frac{Y}{Q}$$

и

$$\int\frac{N}{M}\,dx=\frac{X}{P}+\int\frac{Y}{Q}\,dx. \qquad (1)$$

Поскольку делимость функции

$$q\left(R_1X-Q_1\frac{dX}{dx}\right)+N$$

на P вполне определяет X, она определит также и Y, ибо

$$Y=\frac{q\left(R_1X-Q_1\frac{dX}{dx}\right)+N}{P}.$$

Таким образом, все сводится к определению X из условия, что предыдущее значение Y есть целая функция; или, что то же, все сводится к определению, при помощи уравнения

$$PY=q\left(R_1X-Q_1\frac{dX}{dx}\right)+N,$$

целых функций X и Y, степени которых должны быть соответственно меньше степеней функций P и Q [11]. После того как X и Y будут найдены, предложенный интеграл, при посредстве формулы (1), сведется к интегралу

$$\int \frac{Y}{Q}\,dx,$$

который уже является более простым.

В очень редких случаях возможно, что у Y и Q окажутся общие множители; это упростит и дробь

$$\frac{Y}{Q},$$

и, следовательно, интеграл

$$\int \frac{Y}{Q}\,dx.$$

Упомянутые случаи, очевидно, те, когда функции

$$q\left(R_1X - Q_1\frac{dX}{dx}\right)$$

можно приписать делитель более высокой степени, чем P. Все эти случаи, очевидно, подходят сами собой под общую теорию, не внося в нее никакого изменения. Действительно, если бы случайно оказалось, что функция

$$y = \frac{q\left(R_1X - Q_1\frac{dX}{dx}\right) + N}{P}$$

делится на некоторые множители частного

$$\frac{M}{P} = Q = qQ_1,$$

то мы обнаружили бы это, найдя Y, ибо нужно было бы только проверить, есть ли общие множители у известных функций Y и Q. Важно, однако, заметить, что если бы оказалось случайно, как мы сказали, что функция Y делится на некоторые множители функции $Q = qQ_1$, то эти множители никогда не могли бы

принадлежать q и, следовательно, по необходимости принадлежали бы Q_1. Действительно, Y не может делиться на какой-либо множитель функции q без того, чтобы на него делилось

$$q\left(R_1 X - Q_1 \frac{dX}{dx}\right) + N$$

и, следовательно, N; а тогда N и M имели бы общие множители, что противоречит сделанному предположению

Функция Y, раз она не делится на q, отличное от единицы, не может обратиться в нуль; когда же $q = 1$, величина Y действительно может обратиться в нуль, но весьма редко. Случай

$$Y = 0$$

— этот тот, когда дробь

$$\frac{N}{M}$$

интегрируется алгебраически; ибо в этом случае мы будем иметь

$$\int \frac{N}{M} dx = \frac{X}{P},$$

Поскольку функция Q есть произведение всех простых множителей M, отсюда следует, что все эти множители, вообще говоря, войдут в интеграл

$$\int \frac{Y}{Q} dx,$$

к которому сводится предложенный интеграл

$$\int \frac{N}{M} dx.$$

Те из указанных простых множителей, которые входят в M лишь по одному разу и произведение которых образует величину q, всегда войдут, как мы только что видели, в интеграл

$$\int \frac{Y}{Q} dx;$$

но другие множители, входящие в M более чем по одному разу, могут отчасти или даже полностью не войти в этот интеграл;

это будет иметь место, когда Y и Q будут иметь общие делители, или, лучше сказать, когда Y будет делиться на функцию Q_1 или на некоторые из ее множителей.

V. Займемся определением функций X и Y. Мы будем писать уравнение, которое их определяет, в следующих трех равнозначных формах:

$$\left.\begin{aligned} PY - q\left(R_1X - Q_1\frac{dX}{dx}\right) = N, \\ PY - \left(R - \frac{dQ}{dx}\right)X + Q\frac{dX}{dx} = N, \\ PY - RX + \frac{d\,QX}{dx} = N. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для нахождения X и Y можно было бы применить способ неопределенных коэффициентов. Для этого мы подставили бы в одну из формул (2) целый полином вместо X и другой — вместо Y, причем коэффициенты этих полиномов были бы неопределенные, а степени их были бы равны соответственно степеням функций P и Q, уменьшенным на одну единицу. Мы расположили бы затем левую часть по степеням независимой переменной x и, приравнивая коэффициенты при одних и тех же степенях этой переменной в левой и в правой частях, нашли бы столько же уравнений, сколько их необходимо для нахождения всех неизвестных величин, входящих в полиномы X и Y. Этот метод в случае, когда степень функций X и Y более или менее высока, становится кропотливым по причине большого числа коэффициентов, подлежащих определению. Мы дадим другой метод, вообще говоря, гораздо более удобный.

Первая из формул (2) показывает, что выражение

$$PY - N$$

делится на q. Обозначим через r остаток от деления Y на q и положим

$$Y = qY_1 + r;$$

рассматриваемая формула после деления на q обратится в

$$PY_1 - R_1X + Q_1\frac{dX}{dx} = \frac{N - Pr}{q}.$$

Остаток r должен быть определен — и всегда определится [12] — из условия делимости $N - Pr$ на q. Предположим, что

$$\frac{N - Pr}{q} = N';$$

мы будем иметь

$$PY_1 - R_1X + Q_1\frac{dX}{dx} = N'.$$

Это уравнение с неизвестными X и Y_1 немного проще первоначального, т. е. проще, чем какая-либо из формул (2). К тому же степень Y_1 меньше, чем степень Y; следовательно, уже первое преобразование, которое заключается главным образом в нахождении остатка r, упростило вопрос, подлежащий разрешению.

Деля последнее уравнение на PQ_1, умножая на dx и интегрируя с учетом того, что

$$\int \frac{Q_1\frac{dX}{dx} - R_1X}{PQ_1}\,dx = \frac{X}{P},$$

мы будем иметь

$$\int \frac{N'}{PQ_1}\,dx = \frac{X}{P} + \int \frac{Y_1}{Q_1}\,dx;$$

это дает нам формулу приведения интеграла

$$\int \frac{N'}{PQ_1}\,dx,$$

подобную той, какая имеет место для интеграла предложенной дроби.

Следует заметить, что знаменатель упомянутой дроби отличается от знаменателя PQ_1 только тем, что в последнем отсутствует произведение q всех простых множителей, содержащихся

в M лишь один раз. PQ_1 содержит, следовательно, только кратные множители, так что знаменатель дроби

$$\frac{N'}{PQ_1}$$

удовлетворяет условию алгебраической интегрируемости, но ее числитель ему не удовлетворяет, если только Y_1 не равно нулю. Отсюда следует, что интеграл

$$\int \frac{N'}{PQ_1} dx$$

только сводится к интегралу

$$\int \frac{Y_1}{Q_1} dx.$$

Чтобы фактически выполнить рассматриваемое приведение, нужно было бы найти X и Y_1, и это доставило бы нам одновременно приведение предложенного интеграла, ибо для этого последнего недоставало бы лишь функции Y, а она имеет своим значением

$$Y = qY_1 + r.$$

Но приведение интеграла

$$\int \frac{N'}{PQ_1} dx$$

зависит от уравнения

$$PY_1 - R_1X + Q_1 \frac{dX}{dx} = N',$$

которое представляет первое преобразование формул (2); поэтому мы будем только продолжать рассматривать эти формулы в их указанном преобразовании, не имея нужды останавливаться на интеграле

$$\int \frac{N'}{PQ_1} dx,$$

о котором мы говорили лишь мимоходом

Поскольку функция P делится на Q_1, уравнение

$$PY_1 - R_1X + Q_1\frac{dX}{dx} = N'$$

показывает нам, что

$$R_1X + N'$$

также должно делиться на Q_1; следовательно, если мы положим

$$X = Q_1X_1 + \rho,$$

разумея под X_1 и ρ частное и остаток от деления X на Q_1, то выражение

$$R_1\rho + N'$$

также будет делиться на Q_1. Подставляя предыдущее значение X в уравнение

$$PY_1 - R_1X + Q_1\frac{dX}{dx} = N'$$

и разделив на Q_1, получим

$$P_1Y_1 - \left(R_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right)X_1 + Q_1\frac{dX_1}{dx} = \frac{R_1\rho + N'}{Q_1} - \frac{d\rho}{dx}.$$

Величина ρ должна быть определена условием делимости

$$R_1\rho + N'$$

на Q_1 — условием, достаточным для данной цели.

Положим для краткости

$$\frac{R_1\rho + N'}{Q_1} - \frac{d\rho}{dx} = N_1,$$

или, заменяя N' его значением $\frac{N - Pr}{q}$,

$$N_1 = \frac{N + qR_1\rho - P_1Q_1r}{qQ_1} - \frac{d\rho}{dx}; \tag{3}$$

получим уравнение

$$P_1Y_1 - \left(R_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right)X_1 + Q_1\frac{dX_1}{dx} = N_1.$$

которое может быть записано также следующим образом:

$$P_1Y_1 - R_1X_1 + \frac{dQ_1X_1}{dx} = N_1.$$

Два вида этого уравнения аналогичны двум последним из формул (2). Очень легко дать ему форму, подобную первой из этих формул. Действительно, сравнивая между собой два выражения R_1P_1 и $\frac{dQ_1P_1}{dx}$ производной $\frac{dP}{dx}$, мы найдем

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = \frac{Q_1\frac{dP_1}{dx}}{P_1};$$

отсюда заключаем, что $Q_1\frac{dP_1}{dx}$ делится на P_1. Обозначив через P_2 общий наибольший делитель P_1 и $\frac{dP_1}{dx}$, положим

$$P_1 = Q_2P_2,$$

$$\frac{dP_1}{dx} = R_2P_2,$$

что даст нам

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = \frac{Q_1\frac{dP_1}{dx}}{P_1} = \frac{R_2Q_1}{Q_2};$$

отсюда мы видим, что Q_1 делится на Q_2. Пусть будет соответственно

$$Q_1 = q_1Q_2;$$

тогда имеем

$$R_1 - \frac{dQ_1}{dx} = q_1R_2$$

и далее

$$P_1Y_1 - q_1\left(R_2X_1 - Q_2\frac{dX_1}{dx}\right) = N_1.$$

Таким образом, второе преобразование, как и первоначальное уравнение, может принять следующие три вида:

$$\left.\begin{aligned} P_1Y_1 - q_1\left(R_2X_1 - Q_2\frac{dX_1}{dx}\right) = N_1, \\ P_1Y_1 - \left(R_1 - \frac{dQ_1}{dx}\right)X_1 + Q_1\frac{dX_1}{dx} = N_1, \\ P_1Y_1 - R_1X_1 + \frac{dQ_1X_1}{dx} = N_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Умножая первую из этих формул на $\frac{dx}{P}$, мы будем иметь

$$\frac{N_1dx}{P} = \frac{Q_2\frac{dX_1}{dx} - R_2X_1}{P_1Q_2}dx + \frac{Y_1}{Q_1}dx;$$

далее, интегрируя и замечая, что

$$\int \frac{Q_2\frac{dX_1}{dx} - R_2X_1}{P_1Q_2}dx = \frac{X_1}{P_1},$$

получим

$$\int \frac{N_1}{P}dx = \frac{X_1}{P_1} + \int \frac{Y_1}{Q_1}dx.$$

Таким образом, определив функции X_1 и Y_1 из уравнений (4), мы тем самым приведем интеграл

$$\int \frac{N_1}{P}dx$$

к

$$\int \frac{Y_1}{Q_1}dx;$$

и мы пришли бы к тем же уравнениям (4), поступая с интегралом

$$\int \frac{N_1}{P}dx$$

так же, как мы выше поступили с предложенным интегралом.

В результате двух преобразований интеграл

$$\int \frac{N}{M} dx$$

превратился в

$$\int \frac{N_1}{P} dx,$$

где в знаменателе отсутствует произведение Q всех простых множителей M, взятых каждый один раз. Следует заметить, что при первом преобразовании ушло произведение тех простых множителей, которые содержались в M лишь один раз, а второе преобразование удалило произведение Q_1 кратных множителей M, взятых каждый по разу.

Ясно, что применением двух аналогичных преобразований к интегралу

$$\int \frac{N_1}{P} dx$$

мы удалили бы произведение Q_1 всех простых множителей P, взятых один раз каждый, и, как было только что показано, сначала ушло бы произведение q_1, а затем произведение Q_2. Но поскольку суть дела — в нахождении X_1 и Y_1, которыми определяются X и Y, мы будем продолжать оперировать с уравнениями (4), не останавливаясь на интегралах, приведение которых зависит от различных преобразований этих самых уравнений.

Нам пришлось положить

$$\left.\begin{aligned} Y &= qY_1 + r, \\ X &= Q_1X_1 + \rho; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

положим точно так же, поскольку ситуация аналогична,

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= q_1Y_2 + r_1, \\ X_1 &= Q_2X_2 + \rho_1, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где Y_2 и X_2 — частные, а r_1, ρ_1 — остатки от деления Y_1 и X_1 на q_1 и Q_2.

Подставляя эти значения в уравнения (4) и полагая для краткости

$$\frac{N_1 + q_1 R_2 \rho_1 - Q_2 P_2 r_1}{q_1 Q_2} - \frac{d\rho_1}{dx} = N_2, \tag{7}$$

найдем

$$P_2 Y_2 - \left(R_2 - \frac{dQ_2}{dx}\right) X_2 + Q_2 \frac{dX_2}{dx} = N_2,$$

или

$$P_2 Y_2 - R_2 X_2 + \frac{d\, Q_2 X_2}{dx} = N_2.$$

Остатки r_1 и ρ_1 должны определиться условием, чтобы функция

$$N_1 + q_1 R_2 \rho_1 - Q_2 P_2 r_1$$

делилась на произведение $q_1 Q_2$.

Соотношение между X_2 и Y_2, которое мы только что нашли, может принять еще третий вид, как и уравнения (2) и (4), из которых оно вытекает. Действительно, вернемся к уравнениям

$$P_1 = Q_2 P_2,$$

$$\frac{dP_1}{dx} = R_2 P_2$$

и продифференцируем первое из них; получим

$$\frac{dP_1}{dx} = R_2 P_2 = \frac{dQ_2}{dx} P_2 + Q_2 \frac{dP_2}{dx},$$

откуда

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} = \frac{Q_2 \frac{dP_2}{dx}}{P_2};$$

мы заключаем из этого, что $Q_2 \frac{dP_2}{dx}$ должно делиться на P_2. Обозначим через P_3 общий наибольший делитель P_2 и $\frac{dP_2}{dx}$ и положим

$$P_2 = Q_3 P_3,$$

$$\frac{dP_2}{dx} = R_3 P_3;$$

отсюда следует

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} = \frac{Q_2 R_3}{Q_3}.$$

Так как Q_3 и R_3 не имеют общих множителей, то необходимо, чтобы Q_2 делилось на Q_3; обозначая через q_2 частное от этого деления, будем иметь

$$Q_2 = q_2 Q_3$$

и

$$R_2 - \frac{dQ_2}{dx} = q_2 R_3;$$

следовательно, уравнение, которое должно определять X_2 и Y_2, может принимать три следующие формы:

$$\left.\begin{aligned} P_2 Y_2 - q_2 R_3 X_2 + q_2 Q_3 \frac{dX_2}{dx} &= N_2, \\ P_2 Y_2 - \left(R_2 - \frac{dQ_2}{dx}\right) X_2 + Q_2 \frac{dX_2}{dx} &= N_2, \\ P_2 Y_2 - R_2 X_2 + \frac{d.Q_2 X_2}{dx} &= N_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Полагая, так же как для уравнений (2) и (4),

$$\left.\begin{aligned} Y_2 &= q_2 Y_3 + r_2, \\ X_2 &= Q_3 X_3 + \rho_2, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

мы получим преобразованное соотношение между X_3 и Y_3, которое может принимать три формы, аналогичные (8), а именно:

$$\left.\begin{aligned} P_3 Y_3 - q_3 R_4 X_3 + q_3 Q_4 \frac{dX_3}{dx} &= N_3, \\ P_3 Y_3 - \left(R_3 - \frac{dQ_3}{dx}\right) X_3 + Q_3 \frac{dX_3}{dx} &= N_3, \\ P_3 Y_3 - R_3 X_3 + \frac{d.Q_3 X_3}{dx} &= N_3, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

если положим для сокращения

$$\frac{N_2 + q_2 R_3 \rho_2 - Q_3 P_3 r_2}{q_2 Q_3} - \frac{d\rho_2}{dx} = N_3. \tag{11}$$

Величины ρ_2 и r_2 должны определяться условием, что функция

$$N_2 + q_2 R_3 \rho_2 - Q_3 P_3 r_2$$

делится на произведение $q_2 Q_3$.

Продолжая таким же образом, мы после i преобразований придем к уравнению, которое будет содержать X_i и Y_i и допускать три формы записи

$$\left.\begin{aligned} P_i Y_i - q_i R_{i+1} X_i + q_i Q_{i+1} \frac{dX_i}{dx} = N_i, \\ P_i Y_i - \left(R_i - \frac{dQ_i}{dx}\right) X_i + Q_i \frac{dX_i}{dx} = N_i, \\ P_i Y_i - R_i X_i + \frac{d\,Q_i X_i}{dx} = N_i. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Прежде чем прийти к этому уравнению, мы должны положить

$$\left.\begin{aligned} Y_{i-1} = q_{i-1} Y_i + r_{i-1}, \\ X_{i-1} = Q_i X_i + \rho_{i-1}, \\ \frac{N_{i-1} + q_i R_i \rho_{i-1} - Q_i P_i r_{i-1}}{q_{i-1} Q_i} - \frac{d\rho_{i-1}}{dx} = N_i \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и определить ρ_{i-1} и r_{i-1} условием, что функция

$$N_{i-1} + q_i R_i \rho_{i-1} - Q_i P_i r_{i-1}$$

делится на произведение $q_{i-1} Q_i$.

Если первое из уравнений (12), разделив его на P_{i-1}, приведем к виду

$$\frac{N_i}{P_{i-1}} = \frac{Q_{i+1} \dfrac{dX_i}{dx} - R_{i+1} X_i}{Q_{i+1} P_i} + \frac{Y_i}{Q_i}$$

то, умножив на dx и интегрируя, получим

$$\int \frac{N_i dx}{P_{i-1}} = \frac{X_i}{P_i} + \int \frac{Y_i}{Q_i}\, dx$$

и заключим из этого, что в уравнении (12) содержится приведение интеграла

$$\int \frac{N_i}{P_{i-1}}\, dx$$

к интегралу

$$\int \frac{Y_i}{Q_i}\, dx.$$

Допустим, что функция P_i и производная $\frac{dP_i}{dx}$ не имеют общих множителей. Это предположение всегда дозволено, ибо, продолжая достаточно далеко ряд

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots$$

наибольших общих делителей M и $\frac{dM}{dx}$, P и $\frac{dP}{dx}$, P_1 и $\frac{dP_1}{dx}$, P_2 и $\frac{dP_2}{dx}$ и т. д., мы, очевидно, придем к некоторому делителю P_i, который не будет содержать кратных множителей и будет, следовательно, взаимно простым со своей производной $\frac{dP_i}{dx}$, так что следующий делитель P_{i+1} будет единицей. Но поскольку

$$P_i = Q_{i+1} P_{i+1},$$

$$\frac{dP_i}{dx} = R_{i+1} P_{i+1},$$

мы будем иметь

$$Q_{i+1} = P_i,$$

$$R_{i+1} = \frac{dP_i}{dx},$$

и, следовательно, первое из уравнений (12) обратится в

$$P_i Y_i - q_i \frac{dP_i}{dx} X_i + q_i P_i \frac{dX_i}{dx} = N_i,$$

откуда

$$Y_i = \frac{N_i + q_i \frac{dP_i}{dx} X_i}{P_i} - q_i \frac{dX_i}{dx}; \qquad (14)$$

функция X_i должна быть определена так, чтобы выражение

$$N_i + q_i \frac{dP_i}{dx} X_i$$

делилось на P_i, что и определит ее вполне, ибо степень P_i выше степени X_i.

Возвращаясь к уравнениям

$$\begin{aligned} Y &= qY_1 + r, \\ Y_1 &= q_1 Y_2 + r_1, \\ Y_2 &= q_2 Y_3 + r_2, \\ &\ldots\ldots \\ Y_{i-1} &= q_{i-1} Y_i + r_{i-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} X &= Q_1 X_1 + \rho, \\ X_1 &= Q_2 X_2 + \rho_1, \\ X_2 &= Q_3 X_3 + \rho_2, \\ &\ldots\ldots \\ X_{i-1} &= Q_i X_i + \rho_{i-1}, \end{aligned}$$

последовательно нами установленным, мы без труда найдем из них следующие значения для X и Y:

$$Y = r + qr_1 + qq_1 r_2 + qq_1 q_2 r_3 + qq_1 q_2 q_3 r_4 + \ldots +$$
$$+ qq_1 q_2 q_3 \ldots q_{i-2} r_{i-1} + qq_1 q_2 q_3 \ldots q_{i-1} Y_i,$$
$$X = \rho + Q_1 \rho_1 + Q_1 Q_2 \rho_2 + Q_1 Q_2 Q_3 \rho_3 + Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \rho_4 + \ldots +$$
$$+ Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_{i-1} \rho_{i-1} + Q_1 Q_2 Q_3 \ldots Q_i X_i.$$

В этих значениях все известно, ибо r, r_1, r_2, $\ldots$, r_{i-1}, Y_i, как и ρ, ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_{i-1}, X_i, предполагаются определенными из различных условий делимости, о которых выше шла речь, а что касается функций q, q_1, q_2, $\ldots$, q_{i-1}, Q_1, Q_2, Q_3, $\ldots$, Q_i, то они определяются на основе рассмотрения одного только знаменателя M, путем применения к нему либо соображений, которые

были нами изложены, либо известных приемов, применяемых при разыскании равных множителей, которыми могут обладать целые функции [13].

VII. [14]. В этом параграфе мы продолжим то, что было нами сказано относительно определения величин

$$q,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_{i-1},$$
$$Q,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_i,$$

и сравним это с тем, что вытекает для того же вопроса из теории равных множителей.

Согласно этой теории, следует искать делитель P, общий M и $\frac{dM}{dx}$, затем делитель P_1, общий P и $\frac{dP}{dx}$, затем делитель P_2, общий P_1 и $\frac{dP_1}{dx}$, и т. д., пока не дойдем до делителя P_i, общего функциям P_{i-1} и $\frac{dP_{i-1}}{dx}$, который будет взаимно простым со своей производной $\frac{dP_1}{dx}$, так что $P_{i+1}=1$.

Найдя все эти делители $P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_i$, мы немедленно будем иметь

$$Q=\frac{M}{P},$$

$$Q_1=\frac{P}{P_1},$$

$$Q_2=\frac{P_1}{P_2},$$

$$Q_3=\frac{P_2}{P_3},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$Q_i=\frac{P_{i-1}}{P_i},$$

$$Q_{i+1}=P_i;$$

далее, зная Q, Q_1, Q_2, ..., Q_i, найдем сразу

$$q=\frac{Q}{Q_1}$$

$$q_1=\frac{Q_1}{Q_2},$$

$$q_2=\frac{Q_2}{Q_3},$$

. . . .

$$q_{i-1}=\frac{Q_{i-1}}{Q_i},$$

$$q_i=\frac{Q_i}{Q_{i+1}},$$

$$q_{i+1}=Q_{i+1}.$$

По предлагаемой нами теории нужно также искать делитель P, общий M и $\frac{dM}{dx}$, но, найдя его, мы сразу устраняем его из M и $\frac{dM}{dx}$, чтобы получить функции Q и R. Затем будем искать наибольший делитель, общий функциям Q и $R-\frac{dQ}{dx}$; этот делитель есть q, и, уничтожая его в Q и $R-\frac{dQ}{dx}$, найдем частные Q_1 и R_1. Далее будем искать делитель q_1, общий функциям Q_1 и $R_1-\frac{dQ_1}{dx}$, и, найдя, устраним его из Q_1 и $R_1-\frac{dQ_1}{dx}$; получим частные Q_2 и R_2 и будем продолжать действовать так же, отыскивая наиболбший делитель q_2, общий Q_2 и $R_2-\frac{dQ_2}{dx}$, а найдя его, будем иметь

$$Q_3=\frac{Q_2}{q_2}; \quad R_3=\frac{R_2-\frac{dQ_2}{dx}}{q_2};$$

эту процедуру нужно будет повторять до тех пор, пока не дойдем до функций Q_{i+1} и R_{i+1}, удовлетворяющих уравнению

$$R_{i+1}=\frac{dQ_{i+1}}{dx};$$

тогда общий наибольший делитель величин Q_{i+1} и $R_{i+1}-\frac{dQ_{i+1}}{dx}$ будет сама величина Q_{i+1}, так что $q_{i+1}=Q_{i+1}$, и мы найдем таким путем все нужные нам величины

$$Q,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{i+1},$$
$$q,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{i+1},$$
$$R,\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_{i+1}.$$

Для поставленной нами цели указанный здесь метод кажется нам предпочтительнее того, который связывают с отысканием равных множителей; его даже можно было бы применять — с некоторым преимуществом перед последним — для отыскания этих множителей во всех тех случаях, когда степень функции P значительно выше степени частного Q [15].

Заметим мимоходом следующие соотношения:

$$M=QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i+1}=qq_1^2q_2^3q_3^4\ldots q_i^{i+1}q_{i+1}^{i+2},$$
$$P=Q_1Q_2Q_3\ldots Q_{i+1}=q_1q_2^2q_3^3\ldots q_i^iq_{i+1}^{i+1},$$
$$P_1=Q_2Q_3\ldots Q_{i+1}=q_2q_3^2q_4^3\ldots q_i^{i-1}q_{i+1}^{i},$$
$$P_2=Q_3Q_4\ldots Q_{i+1}=q_3q_4^2\ldots q_i^{i-2}q_{i+1}^{i-1},$$
$$P_3=Q_4Q_5\ldots Q_{i+1}=q_4q_5^2\ldots q_i^{i-3}q_{i+1}^{i-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n=Q_{n+1}Q_{n+2}\ldots Q_{i+1}=q_{n+1}q_{n+2}^2\ldots q_i^{i-n}q_{i+1}^{i-n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_i=Q_{i+1}=q_{i+1};$$
$$Q=qq_1q_2q_3\ldots q_{i+1},$$
$$Q_1=q_1q_2q_3q_4\ldots q_{i+1},$$
$$Q_2=q_2q_3q_4\ldots q_{i+1},$$
$$Q_3=q_3q_4q_5\ldots q_{i+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_n=q_nq_{n+1}q_{n+2}\ldots q_{i+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_{i+1}=q_{i+1},$$

которые иногда могут быть полезными.

VIII. Вернемся к уравнению (2), определяющему X и Y, и поставим в него вместо P произведение

$$Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_{i+1};$$

получим

$$Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_{i+1}Y = N + RX - \frac{d.QX}{dx}.$$

Заменим теперь величину X ее значением

$$\rho + Q_1\rho_1 + Q_1Q_2\rho_2 + Q_1Q_2Q_3\rho_3 + \ldots + Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_{i-1}\rho_{i-1} + \\ + Q_1Q_2Q_3 \ldots Q_iX_i.$$

Мы будем иметь сначала

$$RX - \frac{d.QX}{dx} = \begin{cases} \left(R - \frac{dQ}{dx}\right)\rho + \left(RQ_1 - \frac{d.QQ_1}{dx}\right)\rho_1 + \left(RQ_1Q_2 - \frac{d.QQ_1Q_2}{dx}\right)\rho_2 + \\ + \left(RQ_1Q_2Q_3 - \frac{d.QQ_1Q_2Q_3}{dx}\right)\rho_3 + \ldots + \left(RQ_1Q_2Q_3 \ldots \right. \\ \left. \ldots Q_{i-1} - \frac{d.QQ_1Q_2Q_3 \ldots Q_{i-1}}{dx}\right)\rho_{i-1} + \left(RQ_1Q_2Q_3 \ldots Q_i - \right. \\ \left. - \frac{d.QQ_1Q_2Q_3 \ldots Q_i}{dx}\right)X_i - Q\frac{d\rho}{dx} - QQ_1\frac{d\rho_1}{dx} - QQ_1Q_2\frac{d\rho_2}{dx} - \\ - QQ_1Q_2Q_3\frac{d\rho_3}{dx} - \ldots - QQ_1Q_2Q_3 \ldots Q_{i-1}\frac{d\rho_{i-1}}{dx} - \\ - QQ_1Q_2Q_3 \ldots Q_i\frac{dX_i}{dx}. \end{cases}$$

Но

$$R - \frac{dQ}{dx} = qR_1;$$

далее нетрудно убедиться, что

$$RQ_1 - \frac{d.QQ_1}{dx} = Qq_1R_2,$$

$$RQ_1Q_2 - \frac{d.QQ_1Q_2}{dx} = QQ_1q_2R_3,$$

$$RQ_1Q_2Q_3 - \frac{d.QQ_1Q_2Q_3}{dx} = QQ_1Q_2q_3R_4,$$

. . . .

$$QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}-\frac{d.QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}}{dx}=QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-2}q_{i-1}R_i,$$

$$QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_i-\frac{d\,QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_i}{dx}=QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}q_iR_{i+1}$$

или же

$$R-\frac{dQ}{dx}=qR_1,$$

$$RQ_1-\frac{d.QQ_1}{dx}=Q_1qq_1R_2,$$

$$RQ_1Q_2-\frac{d.QQ_1Q_2}{dx}=Q_1Q_2qq_1q_2R_3,$$

$$RQ_1Q_2Q_3-\frac{d.QQ_1Q_2Q_3}{dx}=Q_1Q_2Q_3qq_1q_2q_3R_4.$$

. . . .

$$RQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}-\frac{d.QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}}{dx}=$$

$$=Q_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}qq_1q_2\ldots q_{i-1}R_i,$$

$$RQ_1Q_2Q_3\ldots Q_i-\frac{d.QQ_1Q_2Q_3\ldots Q_i}{dx}=Q_1Q_2Q_3\ldots Q_iqq_1q_2\ldots q_iR_{i+1},$$

и, следовательно, уравнение, которое нужно решить, примет вид

$$Q_1Q_2Q_3\ldots Q_{i+1}Y=$$

$$=\left\{\begin{aligned}&N+qR_1\rho+Q_1q\left(q_1R_2\rho_1-\frac{d\rho}{dx}\right)+Q_1Q_2qq_1\left(q_2R_3\rho_2-\frac{d\rho_1}{dx}\right)+\\&+Q_1Q_2Q_3qq_1q_2\left(q_3R_4\rho_3-\frac{d\rho_2}{dx}\right)+\ldots+\\&+Q_1Q_2Q_3\ldots Q_{i-1}qq_1q_2q_3\ldots q_{i-2}\left(q_{i-1}R_i\rho_{i-1}-\frac{d\rho_{i-2}}{dx}\right)+\\&+Q_1Q_2Q_3\ldots Q_iqq_1q_2q_3\ldots q_{i-1}\left(q_iR_{i+1}X_i-\frac{d\rho_{i-1}}{dx}\right)-\\&-Q_1Q_2Q_3\ldots Q_{i+1}qq_1q_2q_3\ldots q_i\frac{dX_i}{dx};\end{aligned}\right.$$

Наиболее простой, по-видимому, метод для решения этого уравнения состоит в том, чтобы последовательно делать правую часть делимой на Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{i+1}, что определяет величины ρ, ρ_1 ρ_2, ..., ρ_{i-1}, X_i и Y [16]. Действительно, легко убедиться, что поскольку эти величины, не считая Y, должны привести к виду целых функций все выражения

$$\frac{N+qR_1\rho}{Q_1},$$

$$\frac{N_1+qq_1R_2\rho_1}{Q_2},$$

$$\frac{N_2+qq_1q_2R_3\rho_2}{Q_3},$$

$$\frac{N_3+qq_1q_2q_3R_4\rho_3}{Q_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{N_{i-1}+qq_1q_2q_3\ldots q_{i-1}R_i\rho_{i-1}}{Q_i},$$

$$\frac{N_i+qq_1q_2q_3\ldots q_iR_{i+1}X_i}{Q_{i+1}},$$

они тем самым и определятся. Мы будем иметь далее

$$Y=\frac{N_i+qq_1q_2q_3\ldots q_iR_{i+1}X_i}{Q_{i+1}}-qq_1q_2q_3\cdots q_i\frac{dX_i}{dx}.$$

Мы положили для сокращения [17]

$$\frac{N+qR_1\rho}{Q_1}-q\frac{d\rho}{dx}=N_1,$$

$$\frac{N_1+qq_1R_2\rho_1}{Q_2}-qq_1\frac{d\rho_1}{dx}=N_2,$$

$$\frac{N_2+qq_1q_2R_3\rho_2}{Q_3}-qq_1q_2\frac{d\rho_2}{dx}=N_3,$$

$$\frac{N_3+qq_1q_2q_3R_4\rho_3}{Q_4}-qq_1q_2q_3\frac{d\rho_3}{dx}=N_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{N_{i-1}+qq_1q_2q_3\ldots q_{i-1}R_i\rho_{i-1}}{Q_i}-qq_1q_2q_3\ldots q_{i-1}\frac{d\rho_{i-1}}{dx}=N_i$$

Иногда, возможно, будет полезно внести в указанную только что процедуру некоторое видоизменение, состоящее в том, что, разделив уравнение, которое требуется решить, на некоторое число множителей Q, например на n множителей Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n, что даст

$$Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}Y=$$

$$=\begin{cases} N_n+qq_1q\qquad q_nR_{n+1}\rho_n+Q_{n+1}qq_1q_2q_3\dots q_n\left(q_{n+1}R_{n+2}\rho_{n+1}-\dfrac{d\rho_n}{dx}\right)+\\ +Q_{n+1}Q_{n+2}qq_1q_2q_3\dots q_{n+1}\left(q_{n+2}R_{n+3}\rho_{n+2}-\dfrac{d\rho_{n+1}}{dx}\right)+\dots+\\ +Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i-1}qq_1q_2q_3\dots q_{i-2}\left(q_{i-1}R_i\rho_{i-1}-\dfrac{d\rho_{i-2}}{dx}\right)+\\ +Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_iqq_1q_2q_3\dots q_{i-1}\left(q_iR_{i+1}X_i-\dfrac{d\rho_{i-1}}{dx}\right)-\\ -Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}qq_1q_2q_3\dots q_i\dfrac{dX_i}{dx}\end{cases}$$

можно было бы избавиться от множителя $qq_1q_2q_3\dots q_n$, сделав левую часть

$$Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}Y-N_n$$

делимой на этот множитель. Мы достигнем этого, положив

$$Y=qq_1q_2q_3\dots q_nY_1-Y_2,$$

где Y_1 и $-Y_2$ обозначают частное и остаток от деления Y на $qq_1q_2q_3\dots q_n$, и определяя Y_2 так, чтобы выражение

$$\frac{Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}Y_2+N_n}{qq_1q_2q_3\dots q_n}$$

было целой функцией. После этого, положив для сокращения

$$\frac{Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}Y_2+N_n}{qq_1q_2q_3\dots q_n}=N',$$

получим для Y_1 следующее уравнение:

$$Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}Y_1 =$$

$$=\left\{\begin{aligned}
&N + R_{n+1}\rho_n + Q_{n+1}\left(q_{n+1}R_{n+2}\rho_{n+1} - \frac{d\rho_n}{dx}\right) + \\
&+ Q_{n+1}Q_{n+2}q_{n+1}\left(q_{n+2}R_{n+3}\rho_{n+2} - \frac{d\rho_{n+1}}{dx}\right) + \\
&+ Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}q_{n+1}q_{n+2}\left(q_{n+3}R_{n+4}\rho_{n+3} - \frac{d\rho_{n+2}}{dx}\right) + \dots + \\
&+ Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i-1}q_{n+1}q_{n+2}\dots q_{i-2}\left(q_{i-1}R_i\rho_{i-1} - \frac{d\rho_{i-2}}{dx}\right) + \\
&+ Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_i q_{n+1}q_{n+2}\dots q_{i-1}\left(q_i R_{i+1}X_i - \frac{d\rho_{i-1}}{dx}\right) - \\
&- Q_{n+1}Q_{n+2}Q_{n+3}\dots Q_{i+1}q_{n+1}q_{n+2}\dots q_i\frac{dX_i}{dx}.
\end{aligned}\right.$$

IX. Согласно предыдущему, нам многократно придется решать вопрос, состоящий каждый раз в нахождении функции z, которая делает некоторое выражение вида

$$Bz + C$$

делимым на A; A, B, C — заданные целые функции переменной x; степень неизвестной функции z должна быть меньше степени делителя A [18]. Для этой цели может быть применен метод неопределенных коэффициентов. Мы заменим в таком случае z целой функцией

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots$$

с неизвестными коэффициентами, причем $n+1$ — степень делителя A; затем, разложив выражение

$$B(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots) + C$$

по степеням x, будем делить его на A, пока не дойдем до остатка, степень которого меньше степени делителя. Приравнивая в нем нулю порознь коэффициенты при всех степенях x, получим столько уравнений, сколько необходимо для нахождения всех неизвестных a, b, c, d и т. д.

Можно также, положив

$$\frac{Bz+C}{A}=u$$

или

$$Au-Bz=C,$$

взять за z и за u целые полиномы, коэффициенты которых определятся путем сравнения членов, содержащих одинаковые степени x. Но наиболее простым [19] способом было бы, пожалуй, применение непрерывных дробей. Для этого нужно начать с обращения в дробь этого рода той из двух величин

$$\frac{B}{A} \quad \text{или} \quad \frac{A}{B},$$

у которой степень числителя выше степени знаменателя. Допустив, что этим свойством обладает дробь

$$\frac{A}{B},$$

положим последовательно

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1 A &= q_1 B + z_1,\\
\mu_2 B &= q_2 z_1 + z_2,\\
\mu_3 z_1 &= q_3 z_2 + z_3,\\
\mu_4 z_2 &= q_4 z_3 + z_4,\\
\mu_5 z_3 &= q_5 z_4 + z_5,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\mu_{i-1} z_{i-3} &= q_{i-1} z_{i-2} + z_{i-1},\\
\mu_i z_{i-2} &= q_i z_{i-1};
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

величины q представляют частные, а z — остатки от последовательных делений; эти q не имеют ничего общего с величинами q, с которыми мы имели дело выше. Что касается чисел μ, то они представляют собой множители, взятые для удобства этих делений, которые продолжаются до тех пор, пока не доходим до остатка z_i, равного нулю.

Поскольку такими делениями приходится пользоваться часто, они заслуживали бы особого названия. Их называют, правда, операцией, служащей для нахождения общего наибольшего делителя, но это не является названием и часто не подходит, если мы уверены, что общего делителя не существует. Мы предлагаем обозначать их названием последовательных делений.

Из установленных нами уравнений следует немедленно

$$\frac{\mu_1 A}{B} = q_1 + \cfrac{\mu_2}{q_2 + \cfrac{\mu_3}{q_3 + \cfrac{\mu_4}{q_4 + \cfrac{\mu_5}{q_5 + \cfrac{\mu_6}{q_6 + \cdots + \cfrac{\mu_{i-1}}{q_{i-1} + \cfrac{\mu_i}{q_i}}}}}}} .$$

Положим

$$\frac{P_n}{Q_n} = q_1 + \cfrac{\mu_2}{q_2 + \cfrac{\mu_3}{q_3 + \cfrac{\mu_4}{q_4 + \cfrac{\mu_5}{q_5 + \cdots + \cfrac{\mu_{n-1}}{q_{n-1} + \cfrac{\mu_n}{q_n}}}}}} ;$$

мы будем иметь

$$\frac{\mu_1 A}{B} = \frac{P_i}{Q_i}$$

или же

$$kP_i = \mu_1 A,$$

$$kQ_i = B \; [20].$$

С другой стороны, переходя от непрерывной дроби к обыкновенной, найдем, очевидно, результат вида

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{S_n q_n + T_n}{U_n q_n + V_n} ,$$

где величины S_n, T_n, U_n и V_n не заключают буквы q_n. Уменьшая n на единицу, получим

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{S_{n-1}q_{n-1}+T_{n-1}}{U_{n-1}q_{n-1}+V_{n-1}},$$

откуда, заменяя q_{n-1} через $q_{n-1}+\frac{\mu_n}{q_n}$,

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(S_{n-1}q_{n-1}+T_{n-1})\,q_n+S_{n-1}\mu_n}{(U_{n-1}q_{n-1}+V_{n-1})\,q_n+U_{n-1}\mu_n}=\frac{P_{n-1}q_n+S_{n-1}\mu_n}{Q_{n-1}q_n+U_{n-1}\mu_n};$$

сравнивая последнее значение $\frac{P_n}{Q_n}$ со значением

$$\frac{S_nq_n+T_n}{U_nq_n+V_n},$$

находим [21]

$$S_n=P_{n-1},$$

$$U_n=Q_{n-1}.$$

Следовательно,

$$S_{n-1}=P_{n-2},$$

$$U_{n-1}=Q_{n-2}$$

и, стало быть,

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}q_n+P_{n-2}\mu_n}{Q_{n-1}q_n+Q_{n-2}\mu_n},$$

причем

$$\left.\begin{aligned}P_n&=P_{n-1}q_n+P_{n-2}\mu_n,\\ Q_n&=Q_{n-1}q_n+Q_{n-2}\mu_n.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Исключая q_n и полагая

$$Q_{n-1}P_n-P_{n-1}Q_n=y_n,$$

будем иметь

$$y_n=-\mu_ny_{n-1};$$

подставляя вместо n последовательно числа 2, 3, 4..., получим

$$y_2 = -\mu_2 y_1,$$
$$y_3 = -\mu_3 y_2,$$
$$y_4 = -\mu_4 y_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n-1} = -\mu_{n-1} y_{n-2},$$
$$y_n = -\mu_n y_{n-1},$$

откуда

$$y_n = (-1)^{n-1} \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_n y_1.$$

Но

$$y_1 = Q_0 P_1 - P_0 Q_1,$$

и поскольку две первые из подходящих дробей

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3} \quad \text{и т. д.}$$

будут $\frac{1}{0}$ и $\frac{q_1}{1}$, так что

$$P_0 = 1, \quad P_1 = q_1,$$
$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1,$$

то

$$y_1 = -1$$

и

$$y_n = (-1)^n \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_n,$$

т. е.

$$Q_{n-1} P_n - P_{n-1} Q_n = (-1)^n \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_n.$$

Полагая $n = i$, получим

$$\mu_1 A Q_{i-1} - B P_{i-1} = (-1)^i k \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_i$$

или

$$A \frac{(-1)^i \mu_1 Q_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_i} - B \frac{(-1)^i P_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_i} = 1.$$

Умножая на C, имеем

$$A \frac{(-1)^i \mu_1 C Q_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_i} - B \frac{(-1)^i C P_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \mu_4 \ldots \mu_i} = C.$$

Обозначим через Q и R частное и остаток от деления CP_{i-1} на A, т. е. положим

$$CP_{i-1} = QA + R;$$

тогда предыдущее уравнение обратится в

$$\frac{(-1)^i (\mu_1 CQ_{i-1} - BQ)}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i} A = C + \frac{B(-1)^i R}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i};$$

итак, выражение

$$C + \frac{B(-1)^i R}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i}$$

делится на A, и, следовательно, сравнив его с

$$C + Bz,$$

имеем сразу же

$$z = \frac{(-1)^i R}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i}$$

и

$$\frac{C + Bz}{A} = \frac{(-1)^i (\mu_1 CQ_{i-1} - BQ)}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i},$$

что и представляет полное решение предложенного вопроса.

Резюмируем ход решения. Мы должны найти как функцию z, которая делает

$$C + Bz$$

делимым на A, так и частное от этого деления. При этом степень z должна быть ниже, чем степень A [22]. Чтобы прийти к решению этого вопроса, мы составим частные $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i$ процесса последовательных делений, примененного к функциям A и B; последнее частное будет соответствовать остатку, равному нулю; затем, принимая во внимание множители, которые мы ввели для облегчения последовательного деления, составим функции P_n и Q_n $(n = 2, 3, \ldots, i)$ по общим формулам

$$P_n = P_{n-1}q_n + P_{n-2}\mu_n,$$

$$Q_n = Q_{n-1}q_n + Q_{n-2}\mu_n,$$

исходя из частных значений

$$P_0 = 1, \quad P_1 = q_1,$$

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1.$$

После этого в случае, если степень A выше степени B, разделим CP_{i-1} на A для получения частного Q и остатка R и найдем сразу

$$z = \frac{(-1)^i R}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i} \text{ [23]},$$

$$\frac{C + Bz}{A} = \frac{(-1)^i (\mu_1 CQ_{i-1} - BQ)}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i}.$$

Но если степень B выше, чем степень A, тогда в соответствующем уравнении разделим $\mu_1 CQ_{i-1}$ на A [24] и, обозначая через Q и R частное и остаток от этого деления, положим

$$z = \frac{(-1)^{i+1} R}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i},$$

$$\frac{C + Bz}{A} = \frac{(-1)^{i+1} (CP_{i-1} - BQ)}{k\mu_2\mu_3\mu_4 \ldots \mu_i}.$$

X. Приложим предыдущую теорию к примеру. Пусть нам предложено найти интеграл дроби

$$\int \frac{(x^4 - 2)\,dx}{x^3 (x + 1)(x^2 + x + 1)^4}.$$

Имеем

$$M = (x + 1)\,x^3 (x^2 + x + 1)^4,$$

$$\frac{dM}{dx} = x^3 (x^2 + x + 1)^4 + 3(x + 1)(x^2 + x + 1)^4 x^2 +$$

$$+ 4x(x + 1)(2x + 1)\,x^2 (x^2 + x + 1)^3.$$

Отсюда получаем общий наибольший делитель M и $\frac{dM}{dx}$, а именно

$$P = x^2 (x^2 + x + 1)^3,$$

откуда

$$Q=\frac{M}{P}=x(x+1)(x^2+x+1),$$

$$R=\frac{\frac{dM}{dx}}{P}=x(x^2+x+1)+3(x+1)(x^2+x+1)+$$
$$+4x(x+1)(2x+1),$$

$$R-\frac{dQ}{dx}=(x+1)(8x^2+5x+2);$$

далее найдем наибольший делитель Q и $R-\frac{dQ}{dx}$, а именно

$$q=x+1;$$

следовательно,

$$Q_1=\frac{Q}{q}=x^3+x^2+x,$$

$$R_1=\frac{R-\frac{dQ}{dx}}{q}=8x^2+5x+2,$$

$$R_1-\frac{dQ_1}{dx}=5x^2+3x+1.$$

Общего делителя у Q_1 и $R_1-\frac{dQ_1}{dx}$ нет; значит,

$$q_1=1,$$

$$Q_2=\frac{Q_1}{q_1}=x^3+x^2+x,$$

$$R_2=\frac{R_1-\frac{dQ_1}{dx}}{q_1}=5x^2+3x+1,$$

$$R_2-\frac{dQ_2}{dx}=2x^2+x;$$

общий наибольший делитель Q_2 и $R_2 - \frac{dQ_2}{dx}$ есть x; отсюда

$$q_2 = x,$$

$$Q_3 = \frac{Q_2}{q_2} = x^2 + x + 1,$$

$$R_3 = \frac{R_2 - \frac{dQ_2}{dx}}{q_2} = 2x + 1;$$

и так как

$$R_3 = \frac{dQ_3}{dx},$$

имеем $i = 2$, и уравнение, которое нужно решить, будет

$$(x^3 + x^2 + x)^2 (x^2 + x + 1) Y = \left\{ \begin{array}{l} x^4 - 2 + (x+1)(8x^2 + 5x + 2)\rho + \\ + (x^3 + x^2 + x)(x+1) \times \\ \times \left[(5x^2 + 3x + 1)\rho_1 - \frac{d\rho}{dx} \right] + \\ + (x^3 + x^2 + x)^2 (x+1) \times \\ \times \left(x(2x+1) X_2 - \frac{d\rho_1}{dx} \right) - \\ - (x^3 + x^2 + x)^2 (x^2 + x + 1)\, x \times \\ \qquad \times (x+1) \frac{dX_2}{dx}; \end{array} \right.$$

и, полагая

$$\frac{x^4 - 2 + (x+1)(8x^2 + 5x + 2)\rho}{x^3 + x^2 + x} - (x+1)\frac{d\rho}{dx} = N_1,$$

$$\frac{N_1 + (x+1)(5x^2 + 3x + 1)\rho_1}{x^3 + x^2 + x} - (x+1)\frac{d\rho_1}{dx} = N_2,$$

найдем

$$Y = \frac{N_2 + x(x+1)(2x+1)X_2}{x^2 + x + 1} - (x^2 + x)\frac{dX_2}{dx} \text{ [25]}.$$

Легко видеть, что $N_1 - 1$ должно делиться на $x + 1$; положив поэтому

$$N_1 = (x+1)K + 1,$$

мы заметим без труда, что N_2+1 также делится на $x+1$; положив соответственно

$$N_2=(x+1)K_1-1,$$

мы сразу обнаружим, что и $Y+1$ равным образом делится на $x+1$, так что

$$Y=(x+1)Y_1-1;$$

при подстановке этих значений уравнения, которые нужно решить, приобретают такой вид:

$$K=\frac{(8x^2+5x+2)\rho+x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2+x}-\frac{d\rho}{dx},$$

$$K_1=\frac{(5x^2+3x+1)\rho_1+K+x^2+1}{x^3+x^2+x}-\frac{d\rho_1}{dx},$$

$$Y_1=\frac{x(2x+1)X_2+K_1+x}{x^2+x+1}-x\frac{dX_2}{dx}.$$

Так как неизвестное ρ обращается в единицу при $x=0$, положим

$$\rho=ax^2+bx+1,$$

что даст нам

$$K=\frac{8ax^3+(5a+8b+1)x^2+(2a+5b+6)x+2b+6}{x^2+x+1}-2ax-b:$$

производя деление и заставляя исчезнуть остаток, имеем

$$K=6ax+7b-3a+1,$$

причем из условий обращения в нуль остатка получаем

$$a=\frac{5}{9},$$

$$b=\frac{10}{9},$$

так что

$$\rho=\frac{5x^2+10x+9}{9},\quad K=\frac{30x+64}{9}.$$

Стало быть,

$$K_1 = \frac{9(5x^2+3x+1)\rho_1 + 9x^2+30x+73}{9(x^3+x^2+x)} - \frac{d\rho_1}{dx}.$$

Так как величина $q\rho_1$ при $x=0$ обращается в -73, я полагаю

$$q\rho_1 = ax^2 + bx - 73$$

и получаю

$$K_1 = \frac{5ax^3 + (3a+5b)x^2 + (a+3b-356)x + b - 189}{9(x^2+x+1)} - \frac{2ax+b}{9}$$

или, производя деление и приравнивая остаток нулю,

$$K_1 = \frac{3ax + 4b - 2a}{9}$$

и

$$4b - 2a = -189,$$

$$a + b = -178,$$

откуда

$$a = -\frac{523}{6}, \qquad b = -\frac{545}{6};$$

следовательно,

$$\rho_1 = -\frac{523x^2 + 545x + 438}{54},$$

$$K_1 = -\frac{523x + 378}{18}.$$

Теперь последнее уравнение обратится в

$$Y_1 = \frac{(36x^2+18x)X_2 - 505x - 378}{18(x^2+x+1)} - x\frac{dX_2}{dx};$$

положив

$$X_2 = ax + b,$$

подставляя, производя деление и заставляя исчезнуть остаток, найдем

$$Y_1 = ax + 2b - a,$$

причем

$$2b - a = \frac{-378}{18},$$

$$a + b = \frac{-505}{18}.$$

Мы будем иметь

$$X_2 = -\frac{632x + 883}{54},$$

$$Y_1 = -\frac{632x + 1134}{54}.$$

Следовательно, поскольку

$$Y = (x+1)\, Y_1 - 1,$$

значит,

$$Y = -\frac{316x^2 + 883x + 594}{27}.$$

Далее, подставляя значения ρ, ρ_1 и X_2, а также Q_1 и Q_2 в формулу

$$X = \rho + Q_1\rho_1 + Q_1 Q_2 X_2,$$

найдем

$$X = \frac{5x^2 + 10x + 9}{9} - \frac{523x^2 + 545x + 438}{54}(x^3 + x^2 + x) - \frac{632x + 883}{54}(x^3 + x^2 + x)^2.$$

Значит, окончательно, согласно формуле

$$\int \frac{N}{M}\, dx = \frac{X}{P} + \int \frac{Y}{Q}\, dx,$$

находим

$$\int \frac{x^4 - 2}{x^3 (x+1)(x^2+x+1)^4}\, dx = \frac{5x^2 + 10x + 9}{9x^2 (x^2 + x + 1)^3} - \frac{523x^2 + 545x + 438}{54x (x^2 + x + 1)^2} - \frac{632x + 883}{54 (x^2 + x + 1)} - \frac{1}{27} \int \frac{316x^2 + 883x + 594}{x (x+1)(x^2 + x + 1)}\, dx.$$

ЗАМЕТКА О РАВНЫХ МНОЖИТЕЛЯХ ЦЕЛЫХ ПОЛИНОМОВ

Обозначим соответственно через X, P, Q, R целый полином переменной x, наибольший общий делитель этого полинома и его производной $\frac{dX}{dx}$ и частные

$$\frac{X}{P}, \qquad \frac{\frac{dX}{dx}}{P}.$$

Наибольший общий делитель полиномов Q и $R - \frac{dQ}{dx}$ есть точно произведение простых множителей полинома X; пусть будут q, Q_1 и R_1 это произведение и частные

$$\frac{Q}{q}, \qquad \frac{R - \frac{dQ}{dx}}{q}.$$

Наибольший общий делитель полиномов Q_1 и $R_1 - \frac{dQ_1}{dx}$ будет произведением двойных множителей функции X; обозначим через q_1 произведение, о котором идет речь, и положим

$$\frac{Q_1}{q_1} = Q_2, \qquad \frac{R_1 - \frac{dQ_1}{dx}}{q_1} = R_2.$$

Наибольший делитель, общий полиномам Q_2 и $R_2 - \frac{dQ_2}{dx}$, представит произведение тройных множителей X и т. д.

Эти предложения я доказал в заметке, доложенной 10 октября 1849 г. С.-Петербургской Академии. После ее напечатания я за-

метил, что можно получить непосредственно множители полинома X любой степени кратности. Действительно, множители кратности k образуют наибольший общий делитель полиномов Q и $R - k\frac{dQ}{dx}$; нужно будет, следовательно, только отыскать этот делитель, чтобы иметь упомянутый множитель.

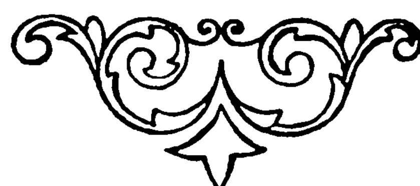
Таким образом, произведение множителей, простых, двойных, тройных и т. д., будет соответственно наибольшим общим делителем полиномов

$$Q \text{ и } R - \frac{dQ}{dx}, \quad Q \text{ и } R - 2\frac{dQ}{dx}, \quad Q \text{ и } R - 3\frac{dQ}{dx}, \ldots$$

Я опускаю доказательство, которое не представляет никакой трудности; оно даже становится совершенно очевидным, если мы представим полином X в виде

$$qq_1^2q_2^3q_3^4 \ldots$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



МЕМУАР О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

I. Объектом этого мемуара является определение движения массы воды, заключенной в цилиндрическом бассейне, покоящемся на горизонтальной плоскости и открытом сверху.

Предположим, что основанием цилиндра бассейна является круг; образующая цилиндра вертикальна; вода, наполняющая цилиндр, подвергается действию только силы тяжести; предположим, что ни одна из частиц воды не получила начальной скорости; наконец, предположим, что на свободную поверхность жидкости действует только атмосферное давление. Если бы эта поверхность в начале движения была плоской и горизонтальной, вода оставалась бы в равновесии; в противном случае она пришла бы в движение, и протяженность этого движения, т. е. пространство, пробегаемое каждой частицей жидкости, зависело бы от разности между начальной свободной поверхностью и поверхностью горизонтальной плоскости, ограничивающей жидкость в равновесии. Если бы эта разность была очень мала, то и само движение было бы таким же малым, так как жидкость пришла бы в движение только потому, что ее свободная начальная поверхность отличалась бы от поверхности, необходимо имеющей место при равновесии; к тому же в изучаемом случае равновесие было бы устойчивым.

II. Обозначим через x, y, ζ три прямоугольные координаты жидкой частицы и возьмем за плоскость x и y горизонтальную плоскость, образующую свободную поверхность жидкости в покое; за ось ζ — ось цилиндра; мы будем считать за положитель-

ное направление ζ направление силы тяжести; пусть, кроме того, u, v, w — параллельные осям скорости точки, определенной координатами x, y, ζ [1]; p — давление на ту же точку; ω — атмосферное давление; g — сила тяжести, t — время, ρ — плотность воды; h — глубина бассейна; l — его радиус; наконец, $f(x, y)$ — вертикальная ордината свободной начальной поверхности, соответствующая абсциссам x и y.

Различные величины, которые мы только что обозначили, находятся между собой в соотношениях, выраженных уравнениями в частных разностях; эти уравнения и способ, которым их находят, известны с давних времен [2]; вот почему мы ограничимся только их написанием, не приводя их доказательства.

Прежде всего для всех точек жидкой массы имеем

$$\frac{dp}{dx}+\rho\left(\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{d\zeta}\right)=0,$$

$$\frac{dp}{dy}+\rho\left(\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{d\zeta}\right)=0,$$

$$\frac{dp}{d\zeta}+\rho\left(\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{d\zeta}\right)=\rho g,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{d\zeta}=0 \text{ [3]}.$$

Затем для точек, расположенных на поверхности, имеем:

1°. Для свободной поверхности жидкости

$$p-\omega=0,$$

$$\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{d\zeta}=0;$$

2°. Для поверхности, уравнение которой есть $\zeta=h$,

$$w=0;$$

3°. Для поверхности, определенной уравнением $x^2+y^2=l^2$,

$$xu+yv=0.$$

Кроме того, если предположим, что $t=0$, то должно быть: $u=0$, $v=0$, $w=0$ для всех точек жидкой массы и $\zeta=f(x, y)$

для точек, расположенных на свободной поверхности; это последнее уравнение определяет форму свободной поверхности в начале движения.

III. Если предположим, что функция, обозначенная через $f(x, y)$, сводится к нулю, то жидкость будет в покое, и тогда будем иметь

$$p - \omega = g\rho\zeta.$$

Но если $f(x, y)$ отличается от нуля, то предыдущее уравнение больше не существует; обозначив через $g\rho\varphi$ поправку, которую нужно внести во второй член в состояние движения, получим

$$p - \omega = g\rho\zeta - g\rho\varphi,$$

и, следовательно, для всех точек жидкой массы будет

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{d\zeta} = g\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{d\zeta} = g\frac{d\varphi}{dy},$$

$$\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{d\zeta} = g\frac{d\varphi}{d\zeta},$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{d\zeta} = 0;$$

а для всех точек поверхности:

1° Для свободной поверхности $\zeta = \varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} + u\frac{d\varphi}{dx} + v\frac{d\varphi}{dy} + w\frac{d\varphi}{d\zeta} = w;$$

2° Для основания цилиндра

$$w = 0;$$

3° Для внутренних стенок цилиндра

$$xu + yv = 0.$$

Кроме того, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\zeta = f(x, y)$ при $t = 0$.

Предыдущие уравнения должны определить значения величин u, v, w и φ как функций от x, y, ζ и t; следовательно, интегрируя дифференциальные уравнения

$$dx = udt, \quad dy = vdt, \quad d\zeta = wdt,$$

получим значения x, y, ζ как функций от t.

Определим также вид свободной поверхности с помощью уравнения

$$\zeta = \varphi.$$

Но интегрирование дифференциальных уравнений, определяющих величины u, v, w и φ, превышает силы известного анализа; однако если допустить, что функция $f(x, y)$ очень мала, и пренебречь величинами порядка $[f(x, y)]^2$, то можно найти значения u, v, w и φ, как увидим в последующем.

IV. В самом деле, если величины u, v, w и φ имеют порядок $f(x, y)$, то для точек жидкой массы мы получим

$$\frac{du}{dt} = g\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{d\varphi}{dy},$$

$$\frac{dw}{dt} = g\frac{d\varphi}{d\zeta},$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{d\zeta} = 0;$$

а для точек поверхности:

1° Для свободной поверхности $\zeta = \varphi$

$$\frac{d\varphi}{dt} = w;$$

2. Для поверхности $\zeta = h$

$$w = 0;$$

3° Для поверхности $x^2 + y^2 = l^2$

$$xu + yv = 0;$$

и всегда при $t=0$ $u=0$, $v=0$, $w=0$ — для всех точек жидкости и $\zeta=f(x, y)$ — для свободной поверхности.

Так как мы пренебрегаем величинами порядка $[f(x, y)]^2$, то можно в u, v, w и φ рассматривать x, y, ζ как постоянные, соответствующие положению равновесия; например, для всех точек свободной поверхности можно подставить нуль вместо ζ в значения u, v, w и φ; этим способом получим для всех точек жидкости

$$u=g\int_0^t \frac{d\varphi}{dx}\,dt,$$

$$v=g\int_0^t \frac{d\varphi}{dy}\,dt,$$

$$w=g\int_0^t \frac{d\varphi}{d\zeta}\,dt.$$

Следовательно, подставляя вместо u, v, w предыдущие значения, получим, каково бы ни было t [4]:

1° Для всех точек жидкой массы

$$0=\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right)dt;$$

2° Для всех точек свободной поверхности, когда $\zeta=0$,

$$0=\int_0^t \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}-g\frac{d\varphi}{d\zeta}\right)dt.$$

Мы не воспользовались уравнением $\zeta=\varphi$; оно послужит для определения вида свободной поверхности.

3° Для всех точек дна, или когда $\zeta=h$,

$$0=\int_0^t \frac{d\varphi}{d\zeta}\,dt;$$

4° Наконец, для всех точек стенок, или когда $x^2+y^2=l^2$,

$$0=\int_0^t\left(x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}\right)dt.$$

Кроме того, уравнения $\varphi=\zeta$, $\frac{d\varphi}{dt}=w$, которые имеют место для всех точек свободной поверхности в любое время, будут иметь место и при $t=0$; но когда $t=0$, получаем $w=0$ для свободной поверхности $\zeta=f(x, y)$; следовательно, полагая $\zeta=0$ и $t=0$, получим

$$\varphi=f(x, y), \quad \frac{d\varphi}{dt}=0.$$

Четыре интегральных выражения с φ равны нулю, каково бы ни было значение t; поэтому необходимо, чтобы величины под знаком $\int_0^t$ сводились к нулю; и, следовательно, получим:

1° Для всех точек жидкости

$$0=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2};$$

2° Когда $\zeta=0$,

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt^2}-g\frac{d\varphi}{d\zeta};$$

3° Когда $\zeta=h$,

$$0=\frac{d\varphi}{d\zeta};$$

4° Когда $x^2+y^2=l^2$,

$$0=x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy};$$

5° Когда сразу $\zeta=0$, $t=0$,

$$\varphi=f(x, y),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=0.$$

Если мы добились нахождения величины φ с помощью предыдущих уравнений, то очень легко определим все обстоятельства движения, т. е. скорость и положение каждой частицы к концу любого времени. Найдем также форму свободной поверхности с помощью уравнения

$$\zeta = \varphi,$$

в котором величина φ должна быть заменена своим значением при $\zeta = 0$.

V. Чтобы проинтегрировать дифференциальные уравнения для φ, предположим [5]

$$x = \gamma \cos p, \quad y = \gamma \sin p;$$

тогда получим

$$x \sin p = y \cos p;$$

отсюда, дифференцируя относительно x и относительно y, получим

$$(x \cos p + y \sin p) \frac{dp}{dx} = -\sin p,$$

$$(x \cos p + y \sin p) \frac{dp}{dy} = \cos p.$$

Два последних уравнения дают

$$y \frac{dp}{dx} = -\sin^2 p,$$

$$x \frac{dp}{dy} = +\cos^2 p,$$

откуда получим

$$\gamma \frac{dp}{dx} = -\sin p,$$

$$\gamma \frac{dp}{dy} = \cos p,$$

$$\gamma^2 \frac{d^2 p}{ax^2} = 2 \sin p \cos p,$$

$$\gamma^2 \frac{d^2 p}{dy^2} = -2 \sin p \cos p;$$

следовательно, получим

$$\frac{dp^2}{dx^2}+\frac{dp^2}{dy^2}=\frac{1}{\gamma^2},$$

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}=0.$$

Кроме того, замечая, что p является линейной функцией от x и y нулевого измерения, получим

$$x\frac{dp}{dx}+y\frac{dp}{dy}=0;$$

и, следовательно,

$$\frac{d\gamma}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{d\gamma}{dy}\frac{dp}{dy}=0.$$

С другой стороны, дифференцированием найдем

$$\frac{d\gamma^2}{dx^2}+\frac{d\gamma^2}{dy^2}=1,$$

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2}+\frac{d^2\gamma}{dy^2}=\frac{1}{\gamma};$$

следовательно, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\varphi}{d\gamma},$$

$$x\frac{d\varphi}{dx}+y\frac{d\varphi}{dy}=\gamma\frac{d\varphi}{d\gamma}.$$

Следовательно, полагая для краткости $f(\gamma\cos p,\ \gamma\sin p)=f(\gamma,p)$, получим следующие уравнения для определения φ:

1° Для всех точек жидкости

$$0=\frac{d^2\varphi}{d\gamma^2}+\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{d^2\varphi}{dp^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{d\varphi}{d\gamma};$$

2° Когда $\zeta=0$,

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt^2}-g\frac{d\varphi}{d\zeta};$$

3° Когда $\zeta = h$,

$$0 = \frac{d\varphi}{d\zeta};$$

4° Когда $\gamma = l$,

$$0 = \frac{d\varphi}{d\gamma};$$

5° Когда $\zeta = 0$ и $t = 0$,

$$\varphi = f(\gamma, p),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Кроме того, величина φ не должна изменяться, когда p заменяется на $2\pi + p$.

VI. Теперь я полагаю, что величина φ разложена в ряд синусов и косинусов углов, кратных p, так что

$$\varphi = P + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos np + Q_n \sin np);$$

величины P, P_n, Q_n являются функциями γ, ζ, t и целых чисел n, удовлетворяющими уравнениям [6]

$$0 = \frac{d^2P}{d\gamma^2} + \frac{d^2P}{d\zeta^2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dP}{d\gamma},$$

$$0 = \frac{d^2P}{dt^2} - g\frac{dP}{d\zeta}, \quad \text{когда } \zeta = 0,$$

$$0 = \frac{dP}{d\zeta}, \quad \text{когда } \zeta = h,$$

$$0 = \frac{dP}{d\gamma}, \quad \text{когда } \gamma = l,$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma, c)\, dc \, [7].$$

когда положим одновременно $\zeta = 0$, $t = 0$,

$$\frac{dP}{dt} = 0,$$

$$0 = \frac{d^2P_n}{d\gamma^2} + \frac{d^2P_n}{d\zeta^2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dP_n}{d\gamma} - \frac{n^2}{\gamma^2} P_n,$$

$$0 = \frac{d^2P_n}{dt^2} - g\frac{dP_n}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta = 0,$$

$$0 = \frac{dP_n}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta = h,$$

$$0 = \frac{dP_n}{d\gamma}, \qquad \text{когда } \gamma = l,$$

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\gamma, c)\cos nc\, dc,$$

когда одновременно полагают $\zeta = 0$, $t = 0$,

$$\frac{dP_n}{dt} = 0,$$

$$0 = \frac{d^2Q_n}{d\gamma^2} + \frac{d^2Q_n}{d\zeta^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{dQ_n}{d\gamma} - \frac{n^2}{\gamma^2} Q_n,$$

$$0 = \frac{d^2Q_n}{dt^2} - g\frac{dQ_n}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta = 0,$$

$$0 = \frac{dQ_n}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta = h,$$

$$0 = \frac{dQ_n}{d\gamma}, \qquad \text{когда } \gamma = l,$$

$$Q_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\gamma, c)\sin nc\, dc,$$

когда полагают одновременно $\zeta = 0$, $t = 0$,

$$\frac{dQ_n}{dt} = 0.$$

Найдем сначала величину P_n; для этого обозначим через θ действительную величину, положительную или отрицательную;

предположим, что величина P_n разлагается в ряд величин T, каждая из которых удовлетворяет уравнениям [8]

$$0=\frac{d^2T}{d\zeta^2}-\theta^2 T,$$

$$0=\frac{d^2T}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{dT}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}T+\theta^2 T,$$

$$0=\frac{d^2T}{dt^2}-g\frac{dT}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta=0,$$

$$0=\frac{dT}{d\zeta}, \qquad \text{когда } \zeta=h,$$

$$0=\frac{dT}{d\gamma}, \qquad \text{когда } \gamma=l,$$

$$0=\frac{dT}{dt}, \qquad \text{когда } \zeta=0,\ t=0$$

и которые отличаются одна от другой значением величины θ, принимающей всевозможные значения.

Получим

$$P_n=\Sigma T;$$

знак Σ относится ко всем значениям θ. Дифференциальным уравнениям для T удовлетворим, беря

$$T=\frac{\left(e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}\right)}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}R\cos kt;$$

величина R является функцией γ и θ, удовлетворяющей уравнениям

$$0=\frac{d^2R}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dR}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}R+\theta^2 R\ [9],$$

для всех значений γ от $\gamma=0$ до $\gamma=l$,

$$0=\frac{dR}{d\gamma}, \qquad \text{когда } \gamma=l;$$

и k обозначает при кратности величину

$$\frac{g\theta\,(e^{h\theta}-e^{-h\theta})}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}};$$

следовательно, получим

$$P_n=\sum\frac{e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}\,R\cos kt.$$

VII. Нам остается найти величину R. Эта функция, независимо от двух дифференциальных уравнений

$$0=\frac{d^2R}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dR}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}R+\theta^2R,$$

$$0=\frac{dR}{d\gamma},\qquad \text{когда } \gamma=l,$$

должна еще удовлетворять условию

$$\sum R=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\gamma,\,c)\cos nc\,dc;$$

кроме того, величина R не должна становиться бесконечной ни для какого значения γ, начиная с $\gamma=0$ до $\gamma=l$.

Обозначим через T_i функцию γ и целого числа i, такую, что, каково бы ни было i, имели бы

$$T_i\neq 0,$$

и положим

$$R=\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}T_i;$$

получим

$$0=\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\left(\frac{d^2T_i}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dT_i}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}T_i+\theta^2T_{i-1}\right).$$

Этому уравнению удовлетворим, если положить

$$0=\frac{d^2T_i}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dT_i}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}T_i+\theta^2T_{i-1}.$$

Чтобы найти T_i, я полагаю [10]

$$T_i = C_i \gamma^{\lambda_i},$$

где C_i и λ_i — две функции от i; получаю

$$(\lambda_i + n)(\lambda_i - n) C_i \gamma^{\lambda_i - 2} + \theta^2 C_{i-1} \gamma^{\lambda_{i-1}} = 0.$$

Полагая

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} = 2,$$

получаем

$$\lambda_i = \lambda_0 + 2i,$$

$$(\lambda_0 + 2i + n)(\lambda_0 + 2i - n) C_i + \theta^2 C_{i-1} = 0.$$

Если в последнем уравнении положить $i = 0$, то оно даст

$$(\lambda_0 + n)(\lambda_0 - n) = 0;$$

отсюда

$$\lambda_0 = n$$

и, следовательно,

$$R = \gamma^n \sum_{i=0}^{i=\infty} C_i \gamma^2;$$

C_i определяется из уравнения

$$0 = 2i(2n + 2i) C_i + \theta^2 C_{i-1}.$$

Допустим,

$$C_i = \frac{(-1)^i \theta^{2i} B_i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2i};$$

получим

$$R = \gamma^n \sum_{i=0}^{i=\infty} B_i \frac{(-1)^i \theta^{2i} \gamma^{2i}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2i}:$$

B_i задается уравнением

$$(2n + 2i) B_i = (2i - 1) B_{i-1}.$$

Но известно, что

$$(p + q) \int_0^{\pi} \sin^p b \cos^q b \, db = (q - 1) \int_0^{\pi} \sin^p b \cos^{q-2} b \, db:$$

следовательно, полагая $p=2n$, $q=2i$, получим

$$(2n+2i)\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos^{2i} b\,db=(2i-1)\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos^{2i-2} b\,db.$$

Следовательно, можем положить

$$B_i=C\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos^{2i} b\,db,$$

C — независимая от i константа; следовательно, получим

$$R=C\gamma^n\int_0^\pi \sin^{2n} b\,db\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{(-1)^i\,\theta^{2i}\gamma^{2i}\cos^{2i} b}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2i}$$

или

$$R=C\gamma^n\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db.$$

Зная частное значение R, получим общее значение [11]

$$R=C\gamma^n\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db+C'\left(\gamma^n\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right)\times$$
$$\times\int_0^\pi\frac{d\gamma}{\gamma^{2n+1}\left[\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]^2}.$$

Но часть этого интеграла, умноженная на C', должна быть отброшена как становящаяся бесконечной [12]; следовательно, получим просто

$$R=C\gamma^n\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db.$$

VIII. Чтобы удовлетворить уравнению

$$0=\frac{dR}{d\gamma},\qquad \text{когда } \gamma=l,$$

нужно положить

$$0=C\left[n(2n+1)\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta l\cos b)\,db-\theta^2 l^2\int_0^\pi \sin^{2n+2} b\cos(\theta l\cos b)\,db\right];$$

отсюда получится или

$$C=0,$$

или

$$n(2n+1)\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta l\cos b)\,db=\theta^2 l^2\int_0^\pi \sin^{2n+2} b\cos(\theta l\cos b)\,db.$$

Если взять это последнее равенство, то первое: $C=0$, не будет больше обязательным, и тогда получим различные значения θ, удовлетворяющие допущенному уравнению; для всех других значений θ, т. е. для всех значений, не удовлетворяющих уравнению

$$n(2n+1)\int_0^\pi \sin^{2n} b\cos(\theta l\cos b)\,db=\theta^2 l^2\int_0^\pi \sin^{2n+2} b\cos(\theta l\cos b)\,db,$$

нужно положить $C=0$ и, следовательно, $R=0$.

Если, напротив, за θ возьмем один из корней уравнения для θ, то соответствующая величина C останется неопределенной, и чтобы зафиксировать ее значение, нужно прибегнуть к уравнению

$$\sum R=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma, c)\cos nc\,dc,$$

где знак Σ относится только к корням трансцендентного уравнения для θ.

Величина R удовлетворяет уравнениям

$$0=\frac{d^2R}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dR}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}R+\theta^2 R,$$

$$0=\frac{dR}{d\gamma},\qquad \text{когда } \gamma=l.$$

Возьмем другую величину R', никогда не становящуюся бесконечной и удовлетворяющую уравнениям

$$0=\frac{d^2R'}{d\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dR'}{d\gamma}-\frac{n^2}{\gamma^2}R'+\theta'^2R',$$

$$0=\frac{dR'}{d\gamma}, \qquad \text{когда } \gamma=l.$$

Умножая первое из уравнений для R на $R'\gamma d\gamma$, первое из уравнений для R' на $R\gamma d\gamma$ и вычитая последний результат из первого, получим

$$0=d\left[\gamma\left(R'\frac{dR}{d\gamma}-R\frac{dR'}{d\gamma}\right)\right]+(\theta^2-\theta'^2)RR'\gamma d\gamma.$$

Следовательно, интегрируя от $\gamma=0$ до $\gamma=l$, получим

$$0=(\theta^2-\theta'^2)\int_0^l RR'\gamma d\gamma;$$

и, значит, если θ отличается от θ', то

$$0=\int_0^l RR'\gamma d\gamma;$$

откуда заключаем

$$\int_0^l R^2\gamma d\gamma=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^l f(\gamma, c)R\cos nc\,\gamma d\gamma dc$$

и, подставляя вместо R его значение, получим

$$C=\frac{1}{\pi}\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{l} f(a, c)\,a^{n+1}\sin^{2n}b\cos(\theta a\cos b)\cos nc\,da\,db\,dc}{\int_0^l a^{2n+1}da\left[\int_0^{\pi}\sin^{2n}b\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2};$$

и, следовательно, получим

$$P_n = \frac{1}{\pi} \sum \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{l} f(a,\ c)\, a^{n+1} \sin^{2n} b \cos(\theta a \cos b) \cos nc\, da db dc}{\int\limits_0^{l} a^{2n+1} da \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta a \cos b)\, db\right]^2} \times$$

$$\times \frac{e^{(h-\zeta)\theta} + e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}} \gamma^n \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta\gamma \cos b)\, db\right] \cos kt;$$

тем же способом найдем

$$Q_n = \frac{1}{\pi} \sum \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{l} f(a,\ c)\, a^{n+1} \sin^{2n} b \cos(\theta a \cos b) \sin nc\, da db dc}{\int\limits_0^{l} a^{2n+1} da \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta a \cos b)\, db\right]^2} \times$$

$$\times \frac{e^{(h-\zeta)\theta} + e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}} \gamma^n \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta\gamma \cos b)\, db\right] \cos kt;$$

и, следовательно,

$$P_n \cos np + Q_n \sin np =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{l} f(a,\ c)\, a^{n+1} \sin^{2n} b \cos(\theta a \cos b) \cos n(p - c)\, da db dc}{\int\limits_0^{l} a^{2n+1} da \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} \cos(\theta a \cos b)\, db\right]^2} \times$$

$$\times \frac{e^{(h-\zeta)\theta} + e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta} + e^{-h\theta}} \gamma^n \left[\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta\gamma \cos b)\, db\right] \cos kt;$$

знак Σ относится ко всем корням θ уравнения

$$n(2n+1)\int\limits_0^{\pi} \sin^{2n} b \cos(\theta l \cos b)\, db = \theta^2 l^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^{2n+2} b \cos(\theta l \cos b)\, db.$$

Таким же образом получим следующее значение для величины P:

$$P=\frac{1}{\pi l^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f(a,\ c)\,a\,da\,dc+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{l} f(a,\ c)\,a\cos(\theta a\cos b)\,da\,db\,dc}{\int_0^{l} a\,da\left[\int_0^{\pi}\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\cdot\frac{e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}\times$$

$$\times\left[\int_0^{\pi}\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt;$$

знак $\sum$ относится ко всем корням θ уравнения

$$0=\int_0^{\pi}\sin^2 b\cos(\theta l\cos b)\,db;$$

следовательно, окончательно получим

$$\varphi=\frac{1}{\pi l^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f(a,\ c)\,a\,da\,dc+\frac{1}{2\pi}\sum\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{l} f(a,\ c)\,a\cos(\theta a\cos b)\,da\,db\,dc}{\int_0^{l} a\,da\left[\int_0^{\pi}\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\times$$

$$\times\frac{e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}\left[\int_0^{\pi}\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{l} f(a,\ c)\,a^{n+1}\sin^{2n} b\cos(\theta a\cos b)\cos n\,(p-c)\,da\,db\,dc}{\int_0^{l} a^{2n+1}da\left[\int_0^{\pi}\sin^{2n} b\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\times$$

$$\times\frac{e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}\gamma^n\left[\int_0^{\pi}\sin^{2n} b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt.$$

Если предположим, что в начале движения свободная поверхность была поверхностью вращения, то функция $f(a,\ c)$ будет

содержать только величину a; следовательно, вместо этой функции мы просто напишем $f(a)$ и получим, после интегрирования по c,

$$\varphi=\frac{2}{l^2}\int\limits_0^l f(a)\,ada+\sum\frac{\int\limits_0^\pi\int\limits_0^l f(a)\,a\cos(\theta a\cos b)\,dadb}{\int\limits_0^l ada\left[\int\limits_0^\pi\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\times$$

$$\times\frac{e^{(h-\zeta)\theta}+e^{-(h-\zeta)\theta}}{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}\left[\int\limits_0^\pi\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt.$$

Это значение φ не зависит от угла p; отсюда получается, что движение является одним и тем же для всякой плоскости, проходящей через ось цилиндра.

IX. Зная значение φ, определим, как было сказано, все, что важно знать о движении, которое мы изучаем; особенно замечательно и важно определение вида свободной поверхности жидкости к концу какого-нибудь времени. Но в согласии с тем, что было сказано в конце пункта IV, этот переменный вид для любой начальной поверхности будет задаваться уравнением

$$\zeta=\frac{1}{\pi l^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^l f(a,c)\,a\,dadc+\frac{1}{2\pi}\sum\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^l f(a,c)\,a\cos(\theta a\cos b)\,dadbdc}{\int\limits_0^l ada\left[\int\limits_0^\pi\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\times$$

$$\times\left[\int\limits_0^\pi\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum\frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^l f(a,c)\,a^{n+1}\sin^{2n}b\cos(\theta a\cos b)\cos n(p-c)\,dadbdc}{\int\limits_0^l a^{2n+1}da\left[\int\limits_0^\pi\sin^{2n}b\cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2}\times$$

$$\times\gamma^n\left[\int\limits_0^\pi\sin^{2n}b\cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt,$$

и если начальная поверхность была поверхностью вращения, то поверхность к концу времени t будет задаваться уравнением

$$\zeta = \frac{2}{l}\int_0^l f(a)\,ada + \sum \frac{\int_0^\pi\int_0^l f(a)\,a\cos(\theta a\cos b)\,dadb}{\int_0^l ada\left[\int_0^\pi \cos(\theta a\cos b)\,db\right]^2} \times$$

$$\times\left[\int_0^\pi \cos(\theta\gamma\cos b)\,db\right]\cos kt;$$

знак Σ в последнем уравнении относится ко всем корням θ уравнения

$$0 = \int_0^\pi \sin^2 b\cos(\theta l\cos b)\,db.$$

Последнее значение ζ, будучи независимым от p, доказывает, что переменная поверхность также является поверхностью вращения. Нам достаточно, следовательно, рассмотреть вид кривой линии — пересечения поверхности жидкости и плоскости, проходящей через ось цилиндра; затем, вращая эту линию вокруг оси ζ, получим требуемую поверхность [13].

ЗАМЕТКА ПО ТЕОРИИ ТЕПЛОТЫ

Вопросы математической физики приводят чаще всего: 1) к интегрированию уравнения в частных разностях [1], которое имеет место для всех точек пространства, где происходит явление; 2) к тому, чтобы удовлетворить дифференциальному уравнению, которое имеет место лишь на границе этого пространства, т. е. на поверхности объема, где происходит явление; 3) к установлению всех особенностей явления в некоторый данный момент.

Сначала ищут частное решение, которое удовлетворяет как уравнению, относящемуся к внутренней части пространства, так и уравнению, относящемуся к поверхности; таких решений иногда бывает бесконечное число; в каждое из них входит множителем произвольная постоянная; затем складывают все частные решения и стараются определить произвольные множители, так чтобы можно было выразить уже известное состояние явления для данного момента. Настоящая заметка предназначена для решения этой последней части задачи.

Представим себе внутри пространства, ограниченного какой-либо поверхностью, дифференциальный элемент ω, обозначим через x, y, z прямоугольные координаты этого элемента, а через p, q, r функции от x, y, z, которые остаются конечными на всем протяжении воображаемого нами пространства.

Рассмотрим тройной интеграл

$$\int\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\cdot\omega\ [^2];$$

можно предположить, что $\omega=dzdydx$.

Возьмем сначала интеграл

$$\int dxdy \int \frac{dr}{dz}\, dz.$$

Чтобы его найти, представим себе четырехугольную призму, перпендикулярную к плоскости xy и имеющую в качестве основания параллелограмм $dydx$ на этой плоскости; эта призма пройдет через весь объем и пересечет его поверхность в нескольких точках; число этих точек обязательно будет четным, поскольку объем предполагается ограниченным со всех сторон. Обозначим через $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{2n}$ значения z, соответствующие точкам пересечения призмы с поверхностью, и положим, что эти величины расположены в возрастающем порядке, начиная с наименьшей z_1. Пусть $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{2n}$ будут значениями r, если положим в нем последовательно $z=z_1$, $z=z_2$, $z=z_3$, $\ldots$, $z=z_{2n}$. Получим

$$\int dydx \int \frac{dr}{dz}\, dz = \int (R_2 + R_4 + \ldots + R_{2n})\, dydx -$$

$$- \int (R_1 + R_3 + \ \ldots \ R_{2_n-1})\, dydx.$$

Обозначим через ν угол, который нормаль к поверхности, продолженная вне объема, составляет с полуосью положительных z, а через s — дифференциальный элемент той же поверхности; получим

$$\int \frac{dr}{dz}\, \omega = \int R \cos \nu \, . \, s;$$

интеграл второй части последнего уравнения относится только к точкам поверхности.

Если обозначим через P и Q значения p и q на поверхности объема, через μ и λ углы, которые нормаль, продолженная изнутри сфероида во внешнее пространство, образует с положительными полуосями x и y, то получим также

$$\int \frac{dp}{dx}\, \omega = \int P \cos \lambda \, . \, s,$$

$$\int \frac{dq}{dy}\, \omega = \int Q \cos \mu \, . \, s,$$

и, следовательно,

$$\int\left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\omega=\int(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,s. \quad (1)$$

Интеграл второй части этого уравнения должен быть распространен лишь на точки поверхности.

Установив это, обозначим через u и u' две функции от x и y, через α, β, γ, α', β', γ' такие характеристики, что произведение

$$\alpha^k\beta^m\gamma^n\alpha'^{k'}\beta'^{m'}\gamma'^{n'}uu'$$

представляет дифференциал

$$\frac{d^{k+m+n}u}{dx^k dy^m dz^n}\cdot\frac{d^{k'+m'+n'}u'}{dx^{k'}dy^{m'}dz^{n'}},$$

так что α и α' являются знаками дифференцирования по x, β и β' — соответственно по y, γ и γ' — по z; кроме того, α, β, γ относятся только к функции u, а α', β' и γ' — к функции u'. Обозначим через

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'),\ F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')$$

две целые рациональные функции от α, β, γ, α', β', γ', первая из которых обладает свойством обращаться в нуль, если положим одновременно

$$\alpha+\alpha'=0,\ \beta+\beta'=0,\ \gamma+\gamma'=0,$$

и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$0=[f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')-\vartheta F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')]\,uu', \quad (2)$$

где ϑ произвольная постоянная; допустим, что

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')=(\alpha+\alpha')f_1+(\beta+\beta')f_2+(\gamma+\gamma')f_3; \quad (3)$$

f_1, f_2, f_3 в силу свойства функции $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')$ будут целыми рациональными функциями от α, β, γ, α', β', γ'.

Умножая предыдущее уравнение на $uu'\omega$ и интегрируя результат по всему объему тела, получим, в силу уравнения (1),

$$\int f(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma')\,uu'\omega=\int(\cos\lambda.f_1+\cos\mu.f_2+\cos\nu.f_3)\,uu's;$$

$\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ должны быть поставлены перед функциями f_1, f_2, f_3, чтобы дифференциалы, которые содержатся в этих функциях, не относились к этим косинусам. Из последнего уравнения следует, что если умножим уравнение (2) на ω и проинтегрируем его по всему протяжению сфероида, то получим

$$\vartheta\int F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')\, uu'\omega = \int(\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu's. \quad (4)$$

Чтобы показать приложение этой формулы, обозначим через $f(\alpha, \beta, \gamma)$ целую рациональную функцию от α, β, γ и предположим, что нам дано дифференциальное уравнение

$$[f(\alpha, \beta, \gamma) - \vartheta]\, u = 0 \quad (5)$$

для всех точек объема; предположим далее, что величина u должна удовлетворять линейным уравнениям в частных разностях при некотором заданном соотношении между x, y и z; этим соотношением в физических вопросах чаще всего бывает уравнение поверхности объема. Обозначим через

$$\nabla_1 u = 0, \quad \nabla_2 u = 0, \ \ldots \quad (6)$$

эти уравнения на поверхности.

Величина u есть функция от x, y, z и постоянной величины ϑ; важно найти функцию $u' = \varphi(x, y, z, \vartheta')$ тех же величин x, y, z и величины ϑ', функцию, обладающую тем свойством, что интеграл $\int uu'\omega$, взятый по всему объему сфероида, является нулем всякий раз, как величине ϑ' приписывается значение, отличное от ϑ, и что этот интеграл отличен от нуля, если положить $\vartheta' = \vartheta$.

Нетрудно видеть, что эта функция u' должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$[f(-\alpha', -\beta', -\gamma') - \vartheta']\, u' = 0, \quad (7)$$

ибо, умножая уравнение (5) на u', уравнение (7) на u и вычитая второй результат из первого, получим сначала

$$[f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta', -\gamma')]\, uu' = (\vartheta - \vartheta')\, uu',$$

затем, так как функция $f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta', -\gamma')$ обращается в нуль при $\alpha + \alpha' = 0$, $\beta + \beta' = 0$, $\gamma + \gamma' = 0$, то можно предположить

$$f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta', -\gamma') = (\alpha + \alpha') f_1 + (\beta + \beta') f_2 + \\ + (\gamma + \gamma') f_3; \tag{8}$$

f_1, f_2, f_3 будут целыми функциями α, β, γ, α', β', γ'; в силу уравнения (4) будем иметь

$$(\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega = \int (\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu's;$$

λ, μ, ν — углы, которые нормаль к поверхности, изображаемой заданным соотношением между x, y, z, составляет с полуосями положительных координат. Интеграл второй части относится ко всем значениям x, y, z, удовлетворяющим заданному соотношению.

Поскольку величина u' не вполне определяется уравнением (7), можно также предположить, что эта величина удовлетворяет следующему уравнению:

$$(\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu' = 0 \tag{9}$$

для всех значений x, y, z, удовлетворяющих данному соотношению. Тогда будем иметь

$$0 = (\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega.$$

Поэтому, если ϑ' отлично от ϑ, то

$$0 = \int uu'\omega; \tag{10}$$

обе части равенства

$$(\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega = \int (\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu's$$

обращаются в нуль одновременно; но отношение

$$\frac{(\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu'}{\vartheta - \vartheta'}.$$

в задачах математической физики стремится к конечному пределу, отличному от нуля, когда $\vartheta - \vartheta'$ и $(\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu'$

оба приближаются к нулю [3]; этот предел и является значением определенного интеграла $\int uu'\omega$.

Применим эти общие результаты к теории теплоты. Обозначим через v температуру твердого сфероида в конце времени t, истекшего с тех пор, как сфероид лучеиспускает в атмосферный воздух; известно, что величина v определяется следующими уравнениями:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2} \quad \text{(для всех точек сфероида)}, \tag{11}$$

$$\frac{dv}{dx}\cos\lambda+\frac{dv}{dy}\cos\mu+\frac{dv}{dz}\cos\nu+hv=0 \text{(для поверхности сфероида)}, \tag{12}$$

$$v=f(x,\ y,\ z) \qquad \text{(для } t=0); \tag{13}$$

λ, μ, ν — углы, которые нормаль к поверхности, продолженная вне сфероида, составляет с полуосями положительных координат, h — некоторая постоянная величина; предполагается, что температура окружающего воздуха равна нулю.

Предположим, для нахождения частного значения v,

$$v=e^{-\vartheta^2 t}u; \tag{14}$$

тогда, пользуясь принятыми нами обозначениями, получим

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\vartheta^2)\,u=0 \qquad \text{(для всех точек)}, \tag{15}$$

$$(\cos\lambda.\alpha+\cos\mu.\beta+\cos\nu.\gamma+h)\,u=0 \text{ (для точек поверхности)}. \tag{16}$$

Невозможно, чтобы величина u, за исключением $u=0$, могла удовлетворять обоим уравнениям (15) и (16) при любом ϑ; ϑ будет, вообще говоря, функцией трех величин p, q, r, определяемых тремя трансцендентными уравнениями. Эти уравнения будут иметь бесчисленное множество корней, и потому будет существовать бесчисленное множество значений u, соответствующих различным значениям ϑ, значениям, которые в свою очередь будут отвечать различным корням p, q, r [4].

Обозначая через ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ... значения ϑ, о которых идет речь, а через u_1, u_2, u_3, ... соответственные значения u, можно предположить, что

$$v = e^{-\vartheta_1^2 t} u_1 + e^{-\vartheta_2^2 t} u_2 + e^{-\vartheta_3^2 t} u_3 + \ldots$$

По виду уравнений, определяющих величины u, можно заключить, что если мы удовлетворили этим уравнениям, полагая

$$u = \varphi(x,\ y,\ z,\ \vartheta),$$

то и значение

$$u = A\varphi(x,\ y,\ z,\ \vartheta),$$

где A — некоторая постоянная величина, также будет им удовлетворять; таким образом, величины u не будут вполне определены, ибо каждая из них будет содержать в качестве множителя произвольную постоянную.

Положив $t = 0$, получим $f(x,\ y,\ z) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$

Теперь уместно отыскать такую величину u', чтобы после умножения на нее ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

и интегрирования результата по всему объему сфероида все члены, кроме одного, обратились в нуль.

Пусть ϑ означает, как и прежде, какую-либо из величин ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 и т. д.; соответствующее значение u ряда u_1, u_2, u_3 и т. д. будет определяться уравнениями

$$0 = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \vartheta^2\right) u \quad \text{(для всех точек сфероида)},$$

$$0 = \frac{du}{dx}\cos\lambda + \frac{du}{dy}\cos\mu + \frac{du}{dz}\cos\nu + hu \qquad \text{(для поверхности)};$$

поэтому, учитывая уравнения (7), (8) и (9), найдем, что значение u', которое обращает в нуль интеграл $\int uu'\omega$, удовлетворяет уравнениям

$$0 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \vartheta'^2)\, u' \qquad \text{(для всех точек)},$$

$$0 = [\cos\lambda\,(\alpha - \alpha') + \cos\mu\,(\beta - \beta') + \cos\nu\,(\gamma - \gamma')]\, uu' \text{(для поверхности)};$$

но поскольку

$$(\cos\lambda.\alpha + \cos\mu.\beta + \cos\nu.\gamma) = -hu,$$

для точек поверхности получим

$$0 = (\cos\lambda.\alpha' + \cos\mu.\beta' + \cos\nu.\gamma' + h)\,u';$$

иными словами, величина u' должна удовлетворять уравнениям

$$0 = \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} + \frac{d^2u'}{dz^2} + \vartheta'^2 u' \quad \text{(для всех точек)}, \qquad (17)$$

$$0 = \frac{du'}{dx}\cos\lambda + \frac{du'}{dy}\cos\mu + \frac{du'}{dz}\cos\nu + hu' \quad \text{(для поверхности)}; \qquad (18)$$

поэтому значения ϑ' будут также представлены значениями ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ...; что касается соответствующих значений u', то мы их обозначим через u'_1, u'_2, u'_3 и т. д.; они будут отличаться от u_1, u_2, u_3 и т. д. лишь постоянными множителями.

Из сказанного следует, что будем иметь

$$\int f(x, y, z)\,u'\omega = \int uu'\omega$$

или

$$1 = \frac{\int f(x, y, z)\,u'\omega}{\int uu'\omega}. \qquad (19)$$

Обозначим через

$$\sum e^{-\vartheta^2 t} u$$

сумму

$$e^{-\vartheta_1^2 t} u_1 + e^{-\vartheta_2^2 t} u_2 + e^{-\vartheta_3^2 t} u_3 + \ldots;$$

тогда в силу уравнения (19) мы сможем написать

$$v = \sum \frac{ue^{-\vartheta^2 t}\int f(x, y, z)\,u'\omega}{\int uu'\omega}, \qquad (20)$$

где знак $\sum$ распространен на все значения ϑ.

Постоянные множители, заключенные в величинах u и u', исчезают в уравнении (20), благодаря чему выполняется началь-

ное состояние задачи. Полагая $t=0$, получим замечательное уравнение

$$f(x,\ y,\ z)=\sum \frac{u\int f(x,\ y,\ z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}, \tag{21}$$

которое заключает в общем виде почти все, что мы знаем о рядах, и которое дает средство разложить в ряд функцию $f(x,\ y,\ z)$ от трех переменных $x,\ y,\ z$ так, чтобы каждый член u ряда удовлетворял уравнениям

$$0=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+\vartheta^2 u \qquad \text{(для всех точек тела)},$$

$$0=\frac{du}{dx}\cos\lambda+\frac{du}{dy}\cos\mu+\frac{du}{dz}\cos\nu+hu \qquad \text{(для точек на поверхности)};$$

кроме того, это разложение дает, вообще говоря, значение функции лишь для точек внутри тела; функцию нельзя представить этим разложением, если рассматривать точку, расположенную вне тела или даже на его поверхности.

Я полагаю, что ряд

$$\sum \frac{u\int f(x,\ y,\ z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}$$

всегда сходится, но доказательство этого замечательного свойства в общем виде представляет большие трудности. Можно установить его сходимость в некоторых частных случаях, например для случая ряда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, da+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, da \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos i\,(x-a),$$

который является одним из самых простых и самых полезных рядов, заключенных в общем ряде. Действительно, нужно только рассмотреть предел, к которому стремится функция

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, da+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\, da \sum_{i=1}^{i=n} \cos i\,(x-a)$$

по мере возрастания n; но поскольку

$$\sum_{i=1}^{i=n} \cos i(x-a) = \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)(x-a)}{2\sin\frac{x-a}{2}} - \frac{1}{2},$$

предыдущая функция может быть заменена следующей:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a)\sin\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)},$$

где ε — весьма малая величина, равная $\frac{2}{2n-1}$. Легко видеть, что часть последнего интеграла, в которой a заметным образом отличается от x, равна нулю, в силу того, что дуга $\frac{x-a}{\varepsilon}$ изменяется очень быстро и переходит от 0 к 2π раньше, чем $\frac{f(a)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}$ успеет заметно измениться. Поэтому можно не обращать внимания на изменяемость множителя $\frac{f(a)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}$ во всех элементах интеграла, где a заметно отличается от x; кроме того, можно рассматривать функцию $f(a)$ как постоянную, если даже a лишь на весьма малую величину отличается от x; но величина $\frac{1}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}$ изменяется в этом случае очень быстро, и ее нельзя рассматривать как постоянную.

Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a)\sin\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}\,da = \frac{f(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}\,da = f(x)$$

и, следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a)\, da + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a)\, da \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos i\,(x-a). \qquad (22)$$

Замечу в заключение, что величина ϑ^2, входящая в уравнение (20), необходимо вещественная; это — следствие принципа распространения теплоты, но столь общая истина должна быть проверена математическим анализом [5].

ВТОРАЯ ЗАМЕТКА ПО ТЕОРИИ ТЕПЛОТЫ

Рассмотрим твердое тело, ограниченное выпуклой [1] поверхностью, первоначально нагретое произвольным образом и излучающее в среду переменной температуры. Обозначим через x, y, z прямоугольные координаты тела, через $L=0$ — уравнение его поверхности, через v — температуру в точке (x, y, z), через λ, μ, ν — углы, образуемые внешней частью нормали к поверхности $L=0$ с положительными полуосями координат; через $f(x, y, z)$ — начальную температуру, через t — время, наконец, через T — функцию от x, y, z и t, зависящую от температуры среды, в которую помещено тело.

Величина v будет, как известно, удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{dv}{dt}=k\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

$$\frac{dv}{dx}\cos\lambda+\frac{dv}{dy}\cos\mu+\frac{dv}{dz}\cos\nu+hv=T,$$

$$v=f(x,\ y,\ z)$$ [2].

Наша задача состоит в том, чтобы привести интегрирование этих уравнений к случаю, когда $T=0$. Для этого найдем какимлибо образом такую величину ψ, чтобы было соблюдено условие

$$\frac{d\psi}{dx}\cos\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos\mu+\frac{d\psi}{dz}\cos\nu+h\psi=T$$

для всех точек поверхности $L=0$. Найдя эту величину, предположим, что

$$v=\psi+u,$$

откуда получим

$$\frac{du}{dt}=k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+\varphi(x,\ y,\ z,\ t),$$

$$\frac{du}{dx}\cos\lambda+\frac{du}{dy}\cos\mu+\frac{du}{dz}\cos\nu+hu=0,$$

$$u=f(x,\ y,\ z)-F(x,\ y,\ z),$$

где $F(x, y, z)$ представляет значение ψ при $t=0$, а $\varphi(x, y, z, t)$ — значение выражения

$$k\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2}\right)-\frac{d\psi}{dt}.$$

Установив это, обозначим через r некоторую постоянную величину, через Y — функцию от x, y, z, t, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям

$$0=\frac{d^2Y}{dx^2}+\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{d^2Y}{dz^2}+r^2Y,$$

$$0=\frac{dY}{dx}\cos\lambda+\frac{dY}{dy}\cos\mu+\frac{dY}{dz}\cos\nu+hY,$$

первому — для всех точек тела, второму — для всех точек, расположенных на поверхности $L=0$, и, положив

$$u=\sum Y,$$

где сумма $\sum$ распространена на все функции Y [3], удовлетворяющие указанным выше условиям, получим

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=\sum\left(\frac{dY}{dt}+kr^2Y\right),$$

$$f(x,\ y,\ z)-F(x,\ y,\ z)=\sum Y;$$

последнее уравнение имеет место лишь при $t=0$.

Пусть для $t=0$ $Y=X$, а для любого t

$$\frac{dY}{dt}+kr^2Y=Z\ [4];$$

тогда получим

$$Y=\left(X+\int_0^t e^{kr^2t}Z\,dt\right)e^{-kr^2t},$$

следовательно,

$$u = \sum \left(X + \int_0^t e^{kr^2 t} Z dt \right) e^{-kr^2 t},$$

и все сводится к нахождению величин X и Z. Но для всех точек тела, очевидно, имеем

$$0 = \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dz^2} + r^2X,$$

$$0 = \frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \frac{d^2Z}{dz^2} + r^2Z,$$

$$f(x, y, z) - F(x, y, z) = \sum X$$

и

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum Z,$$

$$0 = \frac{dX}{dx} \cos\lambda + \frac{dX}{dy} \cos\mu + \frac{dX}{dz} \cos\nu + hX,$$

$$0 = \frac{dZ}{dx} \cos\lambda + \frac{dZ}{dy} \cos\mu + \frac{dZ}{dz} \cos\nu + hZ$$

для всех точек, лежащих на поверхности.

Стало быть, достаточно найти величину U, удовлетворяющую уравнениям

$$0 = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} + r^2U,$$

$$\varphi(x, y, z, t) + f(x, y, z) - F(x, y, z) = \sum U$$

для всех точек тела и уравнению

$$0 = \frac{dU}{dx} \cos\lambda + \frac{dU}{dy} \cos\mu + \frac{dU}{dz} \cos\nu + hU$$

для всех точек, расположенных на поверхности. Действительно, если мы найдем эту величину U, то, предполагая в ней $\varphi(x, y, z, t) = 0$, получим значение X, а значение Z получится из предположения $f(x, y, z) - F(x, y, z) = 0$.

Известно, что в случае тела, нагретого произвольным образом и лучеиспускающего в пространство при температуре, равной нулю, определение температуры тела в конце какого-либо про-

межутка времени сводится к отысканию величины, удовлетворяющей условиям, вполне сходным с теми, которые определяют величину U.

Что касается величины ψ, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\psi}{dx}\cos\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos\mu+\frac{d\psi}{dz}\cos\nu+h\psi=T$$

для всех точек поверхности $L=0$, то ее можно легко найти следующим образом.

Положим, что

$$\psi=L\varphi;$$

тогда для какой-либо точки (x, y, z) получим

$$\frac{d\psi}{dx}\cos\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos\mu+\frac{d\psi}{dz}\operatorname{coz}\nu+h\psi=$$

$$=L\left(\frac{d\varphi}{dx}\cos\lambda+\frac{d\varphi}{dy}\cos\mu+\frac{d\varphi}{dz}\cos\nu+h\varphi\right)+$$

$$+\varphi\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}\ [5],$$

а для точки, расположенной на поверхности,

$$\frac{d\psi}{dx}\cos\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos\mu+\frac{d\psi}{dz}\cos\nu+h\psi=$$

$$=\varphi\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}=T,$$

откуда [6]

$$\varphi=\frac{T}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}};$$

итак, мы можем предположить, что

$$\psi=\frac{LT}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

ВЫДЕРЖКА ИЗ ПРОТОКОЛА САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ОТ 23 СЕНТЯБРЯ 1829 ГОДА

На заседании 23 сентября г-н Остроградский доложил Академии, что он полагает, что нашел уравнение в частных дифференциалах, относящееся к распространению тепла внутри жидкостей. Обозначая буквой v температуру частицы жидкости, определенной координатами x, y, z, буквами p, q, r — скорости той же самой частицы, соответственно параллельные координатам, в конце времени t, протекшего с фиксированного момента, получим

$$\frac{dv}{dt}+p\frac{dv}{dx}+q\frac{dv}{dy}+r\frac{dv}{dz}=\frac{1}{c\rho}\left[\frac{d\left(K\frac{dv}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{dv}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{dv}{dz}\right)}{dz}\right],$$

где c — теплоемкость, ρ — плотность и K — внутренняя теплопроводность жидкости.

Г-н Остроградский в заметке, представленной на эту тему, говорит: «Я знаю только, что знаменитый автор аналитической теории тепла давно нашел уравнение, которому должна удовлетворять температура внутри жидкости, но это уравнение неизвестно до настоящего времени. Автор уравнения сохранил его для опубликования во втором томе математической теории тепла.

«Я думаю, что так как внутреннее излучение в жидкостях распространяется только на незначительные расстояния, как и в твердых телах, то величину тепла, получаемого частицей внутри жидкости от всех соседних частиц, можно вычислять с помощью анализа, аналогичного тому, который служит для нахождения той же самой величины в твердых телах; однако при этом в диф-

ференциале $\frac{dv}{dt}$ относительно времени координаты x, y, z следует рассматривать как функции времени и следует принять во внимание их варьируемость. Можно пренебречь дифференциалами $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ для твердых тел, для которых они в самом деле очень малы, но их необходимо сохранить в случае жидкостей, а также в случае твердых тел, когда хотят принять во внимание перемещение их частиц под действием тепла.

«Я не осмеливаюсь утверждать, что подверг рассмотрению все, что необходимо было бы рассмотреть относительно температуры в жидкостях, и что, следовательно, уравнение

$$\frac{dv}{dt}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}=$$
$$=\frac{1}{c\rho}\left[\frac{d\left(K\frac{dv}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{dv}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{dv}{dz}\right)}{dz}\right]$$

является истинным уравнением, которому должна удовлетворять температура v; вот почему я не продолжаю свои исследования по этому предмету».

ОБ УРАВНЕНИИ, ОТНОСЯЩЕМСЯ К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ТЕПЛОТЫ ВНУТРИ ЖИДКОСТИ

Я пишу эту заметку после того, как прочел одну посмертную статью Фурье, напечатанную в 1833 г. (см. т. 12-й Mémoires de l'Acad. des sc. de Paris, стр. 507) [1].

Фурье считал весьма трудным вывод уравнения для распространения теплоты в жидких массах, и я слышал от него, что когда он дошел в этом выводе до конца, он предложил его — как бы в виде вызова — Лапласу и Пуассону.

В заметке, доложенной мною Академии 23 сентября 1829 г., я дал уравнение

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

в качестве уравнения, выражающего распространение тепла в жидкости; здесь θ означает температуру, k — удельную теплоемкость [2], K — теплопроводность, x, y, z — прямоугольные координаты, и для краткости положено $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$. Но я нарочно добавил, что не уверен в точности своего вывода; я это сделал главным образом из-за трудностей, о которых говорил мне Фурье, и не имею причины жалеть об этой оговорке.

В том же 1829 г. [3], 12 октября, Пуассон доложил в Парижской Академии наук прекрасный мемуар о равновесии и движе-

нии упругих твердых тел и жидкостей и дал мимоходом для переменной температуры в последних то же уравнение

$$k\frac{\theta d}{dt}=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz},$$

как если бы они были твердыми телами; но позднее, в своем «Traité de mécanique»,* он заменил это уравнение тем, которое было предложено мною в указанной выше заметке, т. е.

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}.$$

Несмотря на это исправление, предыдущая формула совпадает с той, которая приведена в упомянутой работе Фурье, а именно

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d(u\theta)}{dx}+\frac{d(v\theta)}{dy}+\frac{d(w\theta)}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz},$$

лишь в том случае, если предполагаем

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\ [4],$$

т. е. если мы рассматриваем массу жидкости как неизменную по объему, несмотря на неодинаковость температуры, что недопустимо. Итак, имеем два различных результата, которые невозможно согласовать. Однако нетрудно показать, что уравнение

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

не является точным, ибо это уравнение — по самому способу, каким оно было получено, — относилось бы к распространению тепла в какой-либо массе в предположении, что внутреннее излучение распространяется лишь на исчезающе малое расстояние; но, предполагая, что оно совершенно отсутствует, т. е. полагая

Стр. 677 второго тома.

$K=0$, что приближенно имеет место для жидкостей, мы получаем

$$\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}=0$$

уравнение, которое выражает, что температура одной и той же частицы остается неизменной во все время движения, — недопустимый результат, поскольку рассматриваемая нами масса сжимаема.

Разница между уравнением

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

и уравнением Фурье происходит, как мы увидим, оттого, что при выводе первого не была принята во внимание изменяемость объема жидкости под влиянием теплоты; а если учесть ее, то получим результат Фурье, причем с гораздо большей простотой и ясностью, чем получил его этот знаменитый математик, ибо приходится сознаться, что анализ Фурье очень неясен, и если бы не его славное имя и его многолетние работы по теплоте, я готов был бы признать этот анализ неверным. Нужно, однако, сказать, что этот мемуар появился после его смерти и что, без сомнения, он придал бы ему всю необходимую точность и ясность, если бы мог опубликовать его сам [5].

Рассмотрим какую-либо часть V жидкого объема, обозначим через s элемент поверхности V, а через λ, μ, ν — углы, которые внешняя часть нормали составляет с координатными осями; известно, что

$$K\left(\frac{d\theta}{dx}\cos\lambda+\frac{d\theta}{dy}\cos\mu+\frac{d\theta}{dz}\cos\nu\right)s\,dt$$

выражает количество тепла, которое поступает в объем V через элемент s в элементарный промежуток времени dt. Интегрируя это выражение по всей поверхности [объема] V, находим выражение

$$\int K\left(\frac{d\theta}{dx}\cos\lambda+\frac{d\theta}{dy}\cos\mu+\frac{d\theta}{dz}\cos\nu\right)s\,dt$$

для количества тепла, получаемого [объемом] V за элемент времени dt. Но так как

$$\int K\left(\frac{d\theta}{dx}\cos\lambda+\frac{d\theta}{dy}\cos\mu+\frac{d\theta}{dz}\cos\nu\right)dt=$$

$$=\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt,$$

то количество тепла, о котором идет речь, будет

$$\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt,$$

где ω — элемент объема V и интеграл распространен на все элементы V.

С другой стороны, количество тепла, которое содержит V по прошествии времени t, сверх того количества, какое он содержал бы при 0°, равно $\int k\theta\omega$, причем интеграл относится ко всем элементам объема V; но за момент dt величина $\int k\theta\omega$ получит приращение $d\int k\theta\omega$, которое должно быть равно

$$\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt.$$

Поэтому, замечая, что, согласно принципу вариационного исчисления, можно взять $\int d(k\theta\omega)$ вместо $d\int k\theta\omega$, имеем

$$\int d(k\theta\omega)=\int\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt,$$

и так как это уравнение должно иметь место, какова бы ни была часть V жидкого объема, т. е. каковы бы ни были пределы со-

держащихся в них интегралов, мы можем ему удовлетворить только в предположении, что

$$d(k\theta\omega)=\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt.$$

Легко видеть, что

$$d(k\theta\omega)=\omega d(k\theta)+k\theta d\omega,$$

а так как

$$d(k\theta)=\left[\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta)}{dx}u+\frac{d(k\theta)}{dy}v+\frac{d(k\theta)}{dz}w\right]dt,$$

$$d\omega=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\omega dt$$ [6],

то имеем

$$d(k\theta\omega)=\left[\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta u)}{dx}+\frac{d(k\theta v)}{dy}+\frac{d(k\theta w)}{dz}\right]\omega dt;$$

следовательно,

$$\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta u)}{dx}+\frac{d(k\theta v)}{dy}+\frac{d(k\theta w)}{dz}=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}.$$

Если рассматривать теплоемкость k как постоянную, то получим уравнение Фурье, а именно:

$$k\left(\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\theta u}{dx}+\frac{d\theta v}{dy}+\frac{d\theta w}{dz}\right)=\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}.$$

Предполагая, кроме того, что $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$, получим уравнение, которое предложили мы — Пуассон и я. Но я рассматриваю предположение $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$ как недопустимое, с чем, без сомнения, согласится и г-н Пуассон, в особенности если он обратится к уравнениям (12) и (13) на стр. 156 своего

прекрасного мемуара об упругих телах и жидкостях; кстати, второе из них надо исправить, ибо там стоит $\frac{d\zeta}{dt}$ вместо

$$\frac{d\zeta}{dt}+u\frac{d\zeta}{dx}+v\frac{d\zeta}{dy}+w\frac{d\zeta}{dz},$$

что, вернее всего, является опечаткой. Что касается уравнения (12), то оно также становится неправильным, если мы хотим принять в расчет сжимаемость жидкостей *посредством давления*; но проистекающая отсюда погрешность весьма мала, и ее делают и в *обыкновенной теории* движения жидкостей [7].

Увеличение объема жидкой частицы зависит не только от возрастания температуры, но и от состояния давления, испытываемого частицей, так что если назовем через ω объем жидкой частицы, будем иметь

$$d\omega=(Pd\theta-Qdp)\,\omega,$$

где через p обозначено давление, причем мы изменяем все, что изменяется в зависимости от t, в $d\theta$ и в dp. Что касается $d\omega$, то за его значение берем

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\omega dt,$$

так что получим

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=P\left(\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)-$$
$$-Q\left(\frac{dp}{dt}+u\frac{dp}{dx}+v\frac{dp}{dy}+w\frac{dp}{dz}\right).$$

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОТНОСЯЩИХСЯ К МАЛЫМ КОЛЕБАНИЯМ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим неограниченную упругую среду и предположим, что по какой-либо причине все частицы этой среды перемещаются так, что частица, находившаяся в своем естественном состоянии в точке с прямоугольными координатами x, y, z, оказывается перенесенной в точку с координатами

$$x+f(x, y, z), \quad y+F(x, y, z), \quad z+g(x, y, z),$$

причем в этой точке она имеет скорости в направлении осей координат, определяемые выражениями

$$f_1(x, y, z), \quad F_1(x, y, z), \quad g_1(x, y, z).$$

Величины $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ представляют собой весьма малые функции переменных x, y, z.

Обозначим через $x+u$, $y+v$, $z+w$ координаты той же частицы в момент времени t; при этом время отсчитывается от того момента, когда все частицы среды были смещены из их естественного положения.

Ясно, что при $t=0$ и при любых x, y, z

$$\left.\begin{aligned} u&=f(x, y, z), & v&=F(x, y, z), & w&=g(x, y, z), \\ \frac{du}{dt}&=f_1(x, y, z), & \frac{dv}{dt}&=F_1(x, y, z), & \frac{dw}{dt}&=g_1(x, y, z). \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Кроме того, математики, которые занимались малыми колебаниями однородных упругих тел, нашли, что величины u, v, w должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2u}{dt^2} - k^2\left(3\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + 2\frac{d^2v}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dxdz}\right),\\
0 &= \frac{d^2v}{dt^2} - k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdy} + 2\frac{d^2w}{dydz}\right),\\
0 &= \frac{d^2w}{dt^2} - k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + 3\frac{d^2w}{dz^2} + 2\frac{d^2u}{dxdz} + 2\frac{d^2v}{dydz}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{b})$$

где k^2 — постоянная [1].

Предметом этой заметки является решение уравнений (a) и (b). Чтобы их проинтегрировать, положим

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_1 \Psi d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu,\\
v &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_2 \Psi d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu,\\
w &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T_3 \Psi d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{c})$$

Величины α, β, γ, λ, μ, ν являются вспомогательными переменными, T_1, T_2, T_3 — неизвестными функциями α, β, γ, λ, μ, ν [2] и времени t; Ψ обозначает — для сокращения — произведение $e^{(x-\lambda)\alpha\sqrt{-1}} \cdot e^{(y-\mu)\beta\sqrt{-1}} \cdot e^{(z-\nu)\gamma\sqrt{-1}}$. Для нахождения функций T_1, T_2, T_3 заметим, что имеем сначала, положив $t = 0$,

$$\left.\begin{aligned}
&T_1 = f(\lambda, \mu, \nu), \quad T_2 = F(\lambda, \mu, \nu), \quad T_3 = g(\lambda, \mu, \nu),\\
&\frac{dT_1}{dt} = f_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \frac{dT_2}{dt} = F_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \frac{dT_3}{dt} = g_1(\lambda, \mu, \nu);
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{d})$$

далее, подставляя вторые члены уравнений (c) соответственно вместо u, v, w в уравнения (b) и обозначая для сокращения $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ через ρ^2, имеем

$$0=\frac{d^2T_1}{dt^2}+k^2\rho^2T_1+2k^2\alpha(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3),$$

$$0=\frac{d^2T_2}{dt^2}+k^2\rho^2T_2+2k^2\beta(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3),$$

$$0=\frac{d^2T_3}{dt^2}+k^2\rho^2T_3+2k^2\gamma(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3),$$

откуда получаем

$$0=\frac{d^2(\alpha T_2-\beta T_1)}{dt^2}+k^2\rho^2(\alpha T_2-\beta T_1),$$

$$0=\frac{d^2(\gamma T_1-\alpha T_3)}{dt^2}+k^2\rho^2(\gamma T_1-\alpha T_3),$$

$$0=\frac{d^2(\beta T_3-\gamma T_2)}{dt^2}+k^2\rho^2(\beta T_3-\gamma T_2),$$

$$0=\frac{d^2(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3)}{dt^2}+3k^2\rho^2(\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3)$$ [3].

Интегрируя эти уравнения так, чтобы удовлетворялись уравнения (d), найдем

$$\alpha T_2-\beta T_1=[\alpha F(\lambda,\mu,\nu)-\beta f(\lambda,\mu,\nu)]\cos k\rho t+$$
$$+\int_0^t[\alpha F_1(\lambda,\mu,\nu)-\beta f_1(\lambda,\mu,\nu)]\cos k\rho t\,dt,$$

$$\gamma T_1-\alpha T_3=[\gamma f(\lambda,\mu,\nu)-\alpha g(\lambda,\mu,\nu)\cos k\rho t+$$
$$+\int_0^t[\gamma f_1(\lambda,\mu,\nu)-\alpha g_1(\lambda,\mu,\nu)\cos k\rho t\,dt,$$

$$\beta T_3-\gamma T_2=[\beta g(\lambda,\mu,\nu)-\gamma F(\lambda,\mu,\nu)\cos k\rho t+$$
$$+\int_0^t[\beta g_1(\lambda,\mu,\nu)-\gamma F_1(\lambda,\mu,\nu)\cos k\rho t\,dt,$$

$$\alpha T_1+\beta T_2+\gamma T_3=[\alpha f(\lambda,\mu,\nu)+\beta F(\lambda,\mu,\nu)+\gamma g(\lambda,\mu,\nu)]\cos k\rho t\sqrt{3}+$$
$$+\int_0^t[\alpha f_1(\lambda,\mu,\nu)+\beta F_1(\lambda,\mu,\nu)+\gamma g_1(\lambda,\mu,\nu)]\cos k\rho t\sqrt{3}\,dt.$$

откуда получаем

$$T_1 = f(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t + \int_0^t f_1(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t\,dt +$$

$$+ k^2 p\alpha\sqrt{-1} + k^2\alpha\sqrt{-1}\int_0^t q\,dt,$$

$$T_2 = F(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t + \int_0^t F_1(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t\,dt +$$

$$+ k^2 p\beta\sqrt{-1} + k^2\beta\sqrt{-1}\int_0^t q\,dt,$$

$$T_3 = g(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t + \int_0^t g_1(\lambda, \mu, \nu)\cos k\rho t\,dt +$$

$$+ k^2 p\gamma\sqrt{-1} + k^2\gamma\sqrt{-1}\int_0^t q\,dt.$$

Здесь мы положили для сокращения

$$p = [\alpha f(\lambda, \mu, \nu) + \beta F(\lambda, \mu, \nu) + \gamma g(\lambda, \mu, \nu)]\,\frac{\cos k\rho t - \cos k\rho t\sqrt{3}}{k^2\rho^2}\sqrt{-1},$$

$$q = [\alpha f_1(\lambda, \mu, \nu) + \beta F_1(\lambda, \mu, \nu) + \gamma g_1(\lambda, \mu, \nu)]\,\frac{\cos k\rho t - \cos k\rho t\sqrt{3}}{k^2\rho^2}\sqrt{-1}.$$

Замечая, что

$$\frac{\cos k\rho t - \cos k\rho t\sqrt{3}}{k^2\rho^2} = \int_t^{t\sqrt{3}}\int_0^{\tau}\cos k\rho r\,dr\,d\tau,$$

будем иметь

$$p = \sqrt{-1}\int_t^{t\sqrt{3}}\int_0^{\tau}[\alpha f(\lambda, \mu, \nu) + \beta F(\lambda, \mu, \nu) + \gamma g(\lambda, \mu, \nu)]\cos k\rho r\,dr\,d\tau,$$

$$q = \sqrt{-1}\int_t^{t\sqrt{3}}\int_0^{\tau}[\alpha f_1(\lambda, \mu, \nu) + \beta F_1(\lambda, \mu, \nu) + \gamma g_1(\lambda, \mu, \nu)]\cos k\rho r\,dr\,d\tau.$$

Умножая значения T_1, T_2, T_3 на $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \Psi d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu$, интегрируя затем результат по α, β, γ, λ, μ, ν от $-\infty$ до $+\infty$ и полагая для краткости

$$Y=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\Psi\, d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu,\quad U=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\Psi\, d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu,$$

получим

$$u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho t\, d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^t dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda,\mu,\nu)\, \Psi \cos k\rho t\ \ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dx}+\int\limits_0^t \frac{dU}{dx}\, dt\right),$$

$$v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho t\, d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^t dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda,\ \mu,\nu)\, \Psi \cos k\rho t\ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dy}+\int\limits_0^t \frac{dU}{dy}\, dt\right),$$

$$w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho t\, d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_0^t dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda,\ \mu,\nu)\, \Psi \cos k\rho t\ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dz}+\int\limits_0^t \frac{dU}{dz}\, dt\right),$$

$$Y=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_t^{t\sqrt{3}} \int\limits_0^{\tau} \left[\frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho r\ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu + \right.$$

$$+\frac{d}{dy} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho r\ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu +$$

$$\left. +\frac{d}{dz} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda,\ \mu,\ \nu)\, \Psi \cos k\rho r\ d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \right] dr d\tau,$$

величину U получим, заменив в выражении Y соответственно f, F, g через f_1, F_1, g_1 [4].

Теперь, заметив, что

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda, \mu, \nu)\, \Psi \cos k\rho r d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dr} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(x +$$

$$+ kr \cos p \sin q,\; y + kr \sin p \sin q,\; z + kr \cos q)\, r \sin q\; dp dq \text{ [5]},$$

получаем

$$4\pi u = \frac{d}{dt} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x + kt \cos p \sin q, y + kt \sin p \sin q, z + kt \cos q)\, t \sin q\, dp dq +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f_1(x + kt \cos p \sin q,\; y + kt \sin p \sin q,\; z + kt \cos q)\, t \sin q\, dp dq +$$

$$+ k^2 \left(\frac{dY}{dx} + \int\limits_0^t \frac{dU}{dx}\, dt\right),$$

$$4\pi v = \frac{d}{dt} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{} F(x + kt \cos p \sin q, y + kt \sin p \sin q, z + kt \cos q)\, t \sin q\, d\, p dq +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} F_1(x + kt \cos p \sin q,\; y + kt \sin p \sin q, z + kt \cos q)\, t \sin q\; dp dq +$$

$$+ k^2 \left(\frac{dY}{dy} + \int\limits_0^t \frac{dU}{dy}\, dt\right),$$

$$4\pi w = \frac{d}{dt} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(x + kt \cos p \sin q, y + kt \sin p \sin q, z + kt \cos q)\, t \sin q\, dp dq +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} g_1(x + kt \cos p \sin q,\; y + kt \sin p \sin q,\; z + kt \cos q)\, t \sin\, q\, dp dq +$$

$$+ k^2 \left(\frac{dY}{dz} + \int\limits_0^t \frac{dU}{dz}\, dt\right),$$

$$Y=\int_t^{t\sqrt{3}}\left[\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq+\right.$$

$$+\frac{d}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq+$$

$$\left.+\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq\right]\tau d\tau,$$

$$U=\int_t^{t\sqrt{3}}\left[\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq+\right.$$

$$+\frac{d}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq+$$

$$\left.+\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(x+k\tau\cos p\sin q, y+k\tau\sin p\sin q, z+k\tau\cos q)\sin q\,dp\,dq\right]\tau d\tau;$$

таковы интегралы уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругой среды при допущении, что упругость всюду одинакова.

Если бы первоначальное смещение имело место лишь в ограниченной части упругого пространства, то функции $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ имели бы значения, отличные от нуля, лишь в пределах этой части, и каждая из них свелась бы к нулю в остальном пространстве. Выведенные выше интегралы будут со ответствовать этому случаю, если только ни функции $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, ни их частные производные по x, y, z не имеют резких скачков [6].

Представляет интерес знать время, когда движение начинается, а также когда оно кончается для данной точки пространства. Чтобы определить эти моменты, рассмотрим одну из функций $f(x, y, z), \ldots, g_1(x, y, z)$, например первую. Чтобы узнать, имеет ли $f(x+r\cos p\sin q,\ y+r\sin p\sin q,\ z+r\cos q)$ величину, отлич-

ную от нуля, или нет, достаточно списать из точки (x, y, z), как из центра, сферическую поверхность радиуса r. Функция $f(x+r\cos p\sin q,\ y+r\sin p\sin q,\ z+r\cos q)$ будет отлична от нуля для всей той части шаровой поверхности, которая будет заключаться в первоначально возмущенном объеме; поэтому она начнет приобретать отличные от нуля значения тогда, когда r станет равно наименьшему расстоянию точки (x, y, z) до возмущенного объема, и вновь обратится в нуль, когда r станет равно наибольшему расстоянию той же точки до того же объема. То же относится и к остальным функциям $F, f, \ldots, g_1$.

Теперь очевидно, что величины Y и U станут отличными от нуля при $t=\frac{R_0}{k\sqrt{3}}$ и перестанут быть таковыми, когда $t=\frac{R_1}{k}$; здесь R_0 и R_1 — наибольшее и наименьшее расстояния точки (x, y, z) до объема, первоначально приведенного в движение. Слагаемые в u, v, w, независимые от Y и U, станут отличными от нуля позднее, именно когда будем иметь $t=\frac{R_0}{k}$, и обратятся в нуль одновременно с Y и U. Итак, для любой точки движение начинается, когда $t=\frac{R_0}{k\sqrt{3}}$, оканчивается, когда $t=\frac{R_1}{k}$, и, следовательно, продолжается в течение времени $\frac{R_1\sqrt{3}-R_0}{k\sqrt{3}}$. Таким образом, продолжительность движения обратно пропорциональна упругости k и не зависит от первоначального смещения [7].

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОТНОСЯЩИХСЯ К МАЛЫМ КОЛЕБАНИЯМ УПРУГИХ ТЕЛ

I. Обозначим через a, b, c, x, y, z, α некоторые величины, независимые друг от друга, и, положив для краткости

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

рассмотрим функцию

$$\left[\left(\frac{x}{r}-\alpha r a\right)^2+\left(\frac{y}{r}-\alpha r b\right)^2+\left(\frac{z}{r}-\alpha r c\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=Q.$$

Нетрудно убедиться, что величина Q удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$0=\frac{d^2Q}{da^2}+\frac{d^2Q}{db^2}+\frac{d^2Q}{dc^2};$$

поэтому, если положим

$$Q=P_0+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\ldots+P_n\alpha^n \text{ и т. д.,} \tag{a}$$

то все величины P будут удовлетворять тому же дифференциальному уравнению, т. е. будем иметь

$$0=\frac{d^2P}{da^2}+\frac{d^2P}{db^2}+\frac{d^2P}{dc^2},$$

каков бы ни был значок при P.

Можно легко найти следующее значение P_n, выраженное через величину $ax+by+cz$:

$$P_n=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}2^n(ax+by+cz)^n-$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)}(n-1)2^{n-2}(ax+by+cz)^{n-2}r^2\rho^2+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-4)}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\,2^{n-4}\,(ax+by+cz)^{n-4}\,r^4\rho^4-\ldots+$$

$$+(-1)^i\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-2i-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2i)}\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)\ldots(n-2i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\times$$

$$\times\,2^{n-2i}\,(ax+by+cz)^{n-2i}\,r^{2i}\,\rho^{2i}+\ldots,$$

и, обратно, величина $(ax+by+cz)^n$ может быть выражена через величины P, ибо, заменяя в предыдущем уравнении n последовательно через $n-2$, $n-4$, $n-6,\ldots$, мы получим столько уравнений, сколько необходимо для исключения всех степеней $ax+by+$ $+cz$, кроме n-й степени [8]. Но чтобы получить выражение величины $(ax+by+cz)^n$ через P более простым способом, допустим сначала, что n — четное и, подставив $2n$ вместо n, положим

$$(ax+by+cz)^{2n}=A_{n,0}\,P_0 r^{2n}\rho^{2n}+A_{n,1}\,P_2 r^{2n-2}\rho^{2n-2}+$$

$$+A_{n,2}\,P_4 r^{2n-4}\rho^{2n-4}+\ldots+A_{n,i}\,P_{2i} r^{2n-2i}\rho^{2n-2i}+\ldots+A_{n,n}P_{2n}. \quad \text{(b)}$$

Из выражения P_n очевидно, что

$$A_{n,n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(4n-1)}\,. \quad \text{(c)}$$

Применяя к уравнению (b) операцию

$$\frac{d^2}{da^2}+\frac{d^2}{db^2}+\frac{d^2}{dc^2}\,,$$

найдем [9]

$$n(2n-1)(ax+by+cz)^{2n-2}=n(2n+1)\,A_{n,0}P_0 r^{2n-2}\rho^{2n-2}+$$

$$+(n-1)(2n+3)\,A_{n,1}P_2 r^{2n-4}\rho^{2n-4}+\ldots+$$

$$+(n-i)(2n-2i+1)\,A_{n,i}P_{2i} r^{2n-2i-2}\rho^{2n-2i-2}+\ldots+(4n-1)\,A_{n,n-1}P_{2n-2};$$

с другой стороны,

$$(ax+by+cz)^{2n-2}=A_{n-1,0}P_0 r^{2n-2}\rho^{2n-2}+A_{n-1,1}P_2 r^{2n-4}\rho^{2n-4}+\ldots+$$

$$+A_{n-1,i}P_{2i} r^{2n-2i-2}\rho^{2n-2i-2}+\ldots+A_{n-1,n-1}P_{2n-2}.$$

Поэтому получим

$$n(2n-1)\,A_{n-1,i}=(n-i)(2n+2i+1)\,A_{n,i},$$

откуда

$$A_{n,i} = 2^i \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(4i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots 2i}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\dots(2n+2i+1)}A_{i,i}.$$

Но, заменяя n через i в уравнении (c), находим

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(4i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots 2i}A_{i,i}=1;$$

поэтому

$$A_{n,i}=2^i(4i+1)\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+2i+1)}$$

или

$$A_{n,i}=2^{2i}(4i+1)\frac{(n+i)(n+i-1)(n+i-2)\dots(n-i+1)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+2i+1)}.$$

Отсюда, полагая для сокращения $r^2\rho^2=\vartheta$, получаем

$$(ax+by+cz)^{2n}=P_0\frac{\vartheta^n}{2n+1}+2^2\cdot 5P_2\frac{(n+1)n\vartheta^{n-1}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}+$$

$$+2^4\cdot 9P_4\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)\vartheta^{n-2}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)}+\dots+$$

$$+2^{2i}(4i+1)P_{2i}\frac{(n+i)(n+i-1)(n+i-2)\dots(n-i+1)\vartheta^{n-i}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+2i+1)}+\dots$$

Приведем это уравнение к следующему виду:

$$(ax+by+cz)^{2n}=P_0\frac{\vartheta^n}{2n+1}+2^2\cdot 5P_2\frac{d^2\vartheta^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\,d\vartheta^2}+$$

$$+2^4\cdot 9P_4\frac{d^4\vartheta^{n+2}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)\,d\vartheta^4}+\dots+$$

$$+2^{2i}(4i+1)P_{2i}\frac{d^{2i}\vartheta^{n+i}}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\dots(2n+2i+1)\,d\vartheta^{2i}}+\dots,$$

умножим на $\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots 2n}$ и просуммируем по n от $n=0$ до $n=\frac{1}{0}$; получим формулу

$$\cos(ax+by+cz) = P_0 R - 2^2 \cdot 5 P_2 \frac{d^2 R}{d\vartheta^2} + 2^4 \cdot 9 P_4 \frac{d^4 R}{d\vartheta^4} + \ldots +$$

$$+ (-1)^i 2^{2i} (4i+1) P_{2i} \frac{d^{2i} R}{d\vartheta^{2i}} + \ldots, \qquad (1)$$

где мы положили для краткости $R = \frac{\sin\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}$.

Чтобы найти $(ax+by+cz)^{2n+1}$ в зависимости от P, положим

$$(ax+by+cz)^{2n+1} = A_{n,0} P_1 r^{2n} \rho^{2n} + A_{n,1} P_3 r^{2n-2} \rho^{2n-2} + A_{n,2} P_5 r^{2n-4} \rho^{2n-4} + \ldots + A_{n,i} P_{2i+1} r^{2n-2i} \rho^{2n-2i} + \ldots$$

и, применяя операцию

$$\frac{d^2}{da^2} + \frac{d^2}{db^2} + \frac{d^2}{dc^2},$$

найдем

$$n(2n+1)(ax+by+cz)^{2n-1} = n(2n+3) A_{n,0} P_1 r^{2n-2} \rho^{2n-2} +$$
$$+ (n-1)(2n+5) A_{n,1} P_3 r^{2n-4} \rho^{2n-4} + \ldots +$$
$$+ (n-i)(2n+2i+3) A_{n,i} P_{2i+1} r^{2n-2i-2} \rho^{2n-2i-2} + \ldots + (4n+1) A_{n,n-1} P_{2n+1};$$

легко видеть, что должно иметь место равенство

$$(n-i)(2n+2i+3) A_{n,i} = n(2n+1) A_{n-1,i}.$$

Отсюда получаем

$$A_{n,i} = 2^i \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4i+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2i+1)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2i+3)} A_{i,i}.$$

Но выражение P_n через $ax+by+cz$ дает

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (4i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2i+1)} A_{i,i} = 1;$$

поэтому

$$A_{n,i} = 2i(4i+3) \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2i+3)},$$

или

$$A_{n,i} = 2^{2i+1}(4i+3)\frac{(n+i+1)(n+i)(n+i-1)\ldots(n-i+1)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\ldots(2n+2i+3)};$$

следовательно,

$$(ax+by+cz)^{2n+1} = 2\cdot 3P_1\frac{(n+1)\vartheta^n}{(2n+2)(2n+3)}+$$

$$+2^3\cdot 7P_3\frac{(n+2)(n+1)n\vartheta^{n-1}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)}+\ldots+$$

$$+2^{2i+1}(4i+3)P_{2i+1}\frac{(n+i+1)(n+i)(n+i-1)\ldots(n-i+1)\vartheta^{n-1}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\ldots(2n+2i+3)}+\ldots,$$

или

$$(ax+by+cz)^{2n+1} = 2\cdot 3P_1\frac{d\vartheta^{n+1}}{(2n+2)(2n+3)\,d\vartheta}+$$

$$+2^3\cdot 7P_3\frac{d^3\vartheta^{n+2}}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)(2n+5)\,d\vartheta^3}+\ldots+$$

$$+2^{2i+1}(4i+3)P_{2i+1}\frac{d^{2i+1}\vartheta^{n+i+1}}{(2n+2)(2n+3)\ldots(2n+2i+3)\,d\vartheta^{2i+1}}+\ldots$$

Умножая на $\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}$ и суммируя от $n=0$ до $n=\frac{1}{0}$, находим

$$\sin(ax+by+cz) = -2\cdot 3P_1\frac{dR}{d\vartheta}+2^3\cdot 7P_3\frac{d^3R}{d\vartheta^3}-\ldots+$$

$$+(-1)^{i+1}2^{2i+1}(4i+3)P_{2i+1}\frac{d^{2i+1}R}{d\vartheta^{2i+1}}+\ldots \qquad (2)$$

Очень легко найти подобное же разложение для функции $e^{ax+by+cz}$, но нет нужды выписывать его.

Положим

$$a=\rho\cos p'\sin q',\quad b=\rho\sin p'\sin q',\quad c=\rho\cos q';$$

$$x=r\cos p\sin q,\quad y=r\sin p\sin q,\quad z=r\cos q;$$

$$\cos q\cos q'+\sin q\sin q'\cos(p-p')=\cos\varphi:$$

тогда функция, обозначенная через Q, запишется так:

$$Q = (1 - 2\alpha r\rho\cos\varphi + \alpha^2\rho^2 r^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Но известно, что радикал $(1 - 2\alpha r\rho\cos\varphi + \alpha^2 r^2\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ можно разложить в ряд

$$X_0 + X_1\alpha r\rho + X_2\alpha^2 r^2\rho^2 + \ldots + X_n\alpha^n r^n\rho^n + \ldots,$$

в котором коэффициент X_n общего члена есть целая рациональная функция степени n трех величин $\cos p'\sin q'$, $\sin p'\sin q'$, $\cos q'$, удовлетворяющая уравнению

$$0 = \frac{1}{\sin q'}\cdot\frac{d\left(\sin q'\frac{dX_n}{dq'}\right)}{dq'} + \frac{1}{\sin^2 q'}\frac{d^2X_n}{dp'^2} + n(n+1)X_n.$$

Поэтому, сравнив коэффициенты при α^n в предыдущем разложении функции Q и в разложении (a), найдем

$$P_n = X_n r^n\rho^n.$$

Подставляя в формулы (1) и (2) вместо a, b, c их значения в зависимости от ρ, p', q', вместо x, y, z их значения в зависимости от r, p, q, и вместо каждого P_n его только что найденное значение, получим

$$\cos r\rho\,[\cos q\cos q' + \sin q\sin q'\cos(p - p')] = X_0R - 2^2\cdot 5X_2\frac{d^2R}{d\vartheta^2}\vartheta + 2^4\cdot 9X_4\frac{d^4R}{d\vartheta^4}\vartheta^2 - \ldots + (-1)^i(4i+1)X_{2i}\frac{d^{2i}R}{d\vartheta^{2i}}\vartheta^i + \ldots, \quad (3)$$

$$\sin r\rho\,[\cos q\cos q' + \sin q\sin q'\cos(p - p')] = -2\cdot 3X_1\frac{dR}{d\vartheta}\vartheta^{\frac{1}{2}} + 2^3\cdot 7X_3\frac{d^3R}{d\vartheta^3}\vartheta^{\frac{3}{2}} - 2^5\cdot 11X_5\frac{d^5R}{d\vartheta^5}\vartheta^{\frac{5}{2}} + \ldots + (-1)^{i+1}2^{2i+1}(4i+3)X_{2i+1}\frac{d^{2i+1}R}{d\vartheta^{2i+1}}\vartheta^{\frac{2i+1}{2}} + \ldots \quad (4)$$

II. Зададимся целью проинтегрировать уравнения [10] для малых колебаний упругих тел

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\frac{d\vartheta}{dx}\right),\\
\frac{d^2v}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\frac{d\vartheta}{dy}\right),\\
\frac{d^2w}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d\vartheta}{dz}\right),\\
\vartheta&=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

которые нашел Пуассон.

Дифференцируя первое из этих уравнений по x, второе по y, третье по z и взяв сумму, найдем

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=3k^2\left(\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\frac{d^2\vartheta}{dy^2}+\frac{d^2\vartheta}{dz^2}\right)$$

Можно теперь решить это уравнение и найти величину ϑ, подстановка которой в уравнения (5) позволит легко решить и их. Действительно, так как мы полагаем, что выражение ϑ через x, y и z известно, то и величины $\frac{d\vartheta}{dx}$, $\frac{d\vartheta}{dy}$, $\frac{d\vartheta}{dz}$ будут также известными функциями тех же переменных x, y, z; поэтому уравнения (5) перейдут в

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+f(x,y,z),\\
\frac{d^2v}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)+f_1(x,y,z),\\
\frac{d^2w}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+f_2(x,y,z).
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Но, согласно теории линейных уравнений, для нахождения значений u, v, w достаточно взять какое-либо решение уравнений (6) и проинтегрировать полностью эти уравнения без членов $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, что мы уже умеем делать. Чтобы закончить решение задачи, останется только прибавить должным

образом указанные полные интегралы к частным решениям уравнений (6) [11]. Мы лишь указали способ решения уравнений (5), теперь мы проинтегрируем их на самом деле, пользуясь формулой (3) [12].

Положим

$$u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} T\cos\left[(x'-x)\,a+(y'-y)\,b+(z'-z)\,c\right]dx'dy'dz'dadbdc,$$

$$v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} T_1\cos\left[(x'-x)\,a+(y'-y)\,b+(z'-z)\,c\right]dx'dy'dz'dadbdc,$$

$$w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} T_2\cos\left[(x'-x)\,a+(y'-y)\,b+(z'-z)\,c\right]dx'dy'dz'dadbdc,$$

где T, T_1, T_2 обозначают функции величины t и вспомогательных переменных a, b, c, x', y', z'. Подставляя эти величины в уравнения (5), увидим, что им можно удовлетворить, если положить

$$\rho^2=a^2+b^2+c^2,\qquad M=aT+bT_1+cT_2,$$

$$\left.\begin{aligned}0&=\frac{d^2T}{dt^2}+k^2(\rho^2T+2aM),\\0&=\frac{d^2T_1}{dt^2}+k^2(\rho^2T_1+2bM),\\0&=\frac{d^2T_2}{dt^2}+k^2(\rho^2T_2+2cM).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Умножая первое из уравнений (7) на a, второе на b, третье на c, складывая их вместе и полагая для краткости $k\sqrt{3}=k'$, найдем

$$0=\frac{d^2M}{dt^2}+k'^2\rho^2M.$$

Отсюда, интегрируя, имеем

$$M=P\cos k'\rho t+\frac{Q\sin k'\rho t}{k'\rho},$$

причем P и Q не зависят от t.

Уравнениям (7) можно удовлетворить, полагая

$$T=\frac{aM}{\rho^2}, \quad T_1=\frac{bM}{\rho^2}, \quad T_2=\frac{cM}{\rho^2};$$

следовательно, полные интегралы этих уравнений будут

$$T=A\cos k\rho t+\frac{B\sin k\rho t}{k\rho}+\frac{aM}{\rho^2},$$

$$T_1=A'\cos k\rho t+\frac{B'\sin k\rho t}{k\rho}+\frac{bM}{\rho^2},$$

$$T_2=A''\cos k\rho t+\frac{B''\sin k\rho t}{k\rho}+\frac{cM}{\rho^2}.$$

Предположим, что для $t=0$

$$u=f(x, y, z), \quad v=f_1(x, y, z), \quad w=f_2(x, y, z);$$

$$\frac{du}{dt}=F(x, y, z), \quad \frac{dv}{dt}=F_1(x, y, z), \quad \frac{dw}{dt}=F_2(x, y, z).$$

Как известно [13], мы должны иметь для того же значения $t=0$

$$T=f(x', y', z'), \quad T_1=f_1(x', y', z'), \quad T_2=f_2(x', y', z');$$

$$\frac{dT}{dt}=F(x', y', z'), \quad \frac{dT_1}{dt}=F_1(x', y', z'), \quad \frac{dT_2}{dt}=F_2(x', y', z')$$

и, следовательно, получим (опять-таки для $t=0$)

$$M=af(x', y', z')+bf_1(x', y', z')+cf_2(x', y', z'),$$

$$\frac{dM}{dt}=aF(x', y', z')+bF_1(x', y', z')+cF_2(x', y', z').$$

Полагая $t=0$ в найденных ранее значениях M, u, v, w, как и в их производных по t, получим

$$P=af(x', y', z')+bf_1(x', y', z')+cf_2(x', y', z'),$$

$$Q=aF(x', y', z')+bF_1(x', y', z')+cF_2(x', y', z'),$$

$$f(x', y', z')=A+\frac{aP}{\rho^2},$$

$$f_1(x', y', z')=A'+\frac{bP}{\rho^2},$$

$$f_2(x', y', z') = A'' + \frac{cP}{\rho^2},$$

$$F(x', y', z') = B + \frac{aQ}{\rho^2},$$

$$F_1(x', y', z') = B' + \frac{bQ}{\rho^2},$$

$$F_2(x', y', z') = B'' + \frac{cQ}{\rho^2},$$

а отсюда

$$T = f(x', y', z')\cos k\rho t + F(x', y', z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho} + \frac{aP}{\rho^2}(\cos k'\rho t - \cos k\rho t) + \\ + \frac{aQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho} - \frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right),$$

$$T_1 = f_1(x', y', z')\cos k\rho t + F_1(x', y', z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho} + \frac{bP}{\rho^2}(\cos k'\rho t - \cos k\rho t) + \\ + \frac{bQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho} - \frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right),$$

$$T_2 = f_2(x', y', z')\cos k\rho t + F_2(x', y', z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho} + \frac{cP}{\rho^2}(\cos k'\rho t - \cos k\rho t) + \\ + \frac{cQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho} - \frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right).$$

Далее найдем

$$u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x', y', z')\cos k\rho t + F(x', y', z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right] \times \\ \times \cos[(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'dy'dz'dadbdc + \\ + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aP}{\rho^2}(\cos k'\rho t - \cos k\rho t)\cos[(x'-x)a + (y'-y)b + \\ + (z'-z)c]\, dx'dy'dz'dadbdc + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{aQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho} - \frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right) \times \\ \times \cos[(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c]\, dx'dy'dz'dadbdc,$$

$$v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x',y',z')\cos k\rho t+F_1(x',y',z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right]\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{bP}{\rho^2}(\cos k'\rho t-\cos k\rho t)\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+$$

$$+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{bQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho}-\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right)\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc,$$

$$w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f_2(x',y',z')\cos k\rho t+F_2(x',y',z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right]\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{cP}{\rho^2}(\cos k'\rho t-\cos k\rho t)\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+$$

$$+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{cQ}{\rho^2}\left(\frac{\sin k'\rho t}{k'\rho}-\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right)\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc.$$

III. Займемся теперь упрощением предшествующих интегралов. Мы можем рассматривать величины u, v, w как состоящие каждая из трех частей, и мы примем за первые части члены в выражениях этих величин, не зависящие от P и Q. Эти члены содержатся в формуле

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\varphi(x',y',z')\cos k\rho t+\psi(x',y',z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right\}\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc.$$

За вторые части u, v, w примем все члены, зависящие от P и содержащиеся в формуле

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc}{\rho^2} (\cos k'\rho t - \cos k\rho t) \times$$
$$\times \cos[(x' - x)a + (y' - y)b + (z' - z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc,$$

где A, B, C, D, E, F представляют произвольные функции x', y', z'. Остальные члены составят третьи части u, v, w. Они зависят от величины Q, и если бы мы проинтегрировали последнюю формулу по t от $t = 0$, мы получили бы формулу, содержащую третьи части функций u, v, w.

В общем, нетрудно видеть, какие значения нужно последовательно выбрать для произвольных функций A, B, C, D, E, F, чтобы выражение

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc\} (\cos k'\rho t - \cos k\rho t) \times$$
$$\times \cos[(x' - x)a + (y' - y)b + (z' - z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc$$

представило члены u, v, w, зависящие от P, и чтобы интеграл $\int\limits_0^t$ этого выражения дал третьи части тех же величин u, v, w, т. е. их члены, зависящие от Q. Можно также получить последние члены из вторых частей u, v, w, заменяя f, f_1, f_2 соответственно через F, F_1, F_2 и интегрируя по t от 0 до t.

Итак, согласно сказанному, дело идет о приведении интегралов в двух формулах

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \varphi(x', y', z') \cos k\rho t + \psi(x', y', z') \frac{\sin k\rho t}{k\rho} \right\} \times$$
$$\times \cos[(x' - x)a + (y' - y)b + (z' - z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc,$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc}{\rho^2} (\cos k'\rho t - \cos k\rho t) \times$$
$$\times \cos[(x' - x)a + (y' - y)b + (z' - z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc.$$

Начнем с первой формулы.

Если примем во внимание, что

$$\frac{\sin k\rho t}{k\rho}=\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos\left[a\cos p\sin q+b\sin p\sin q+c\cos q\right]kt\sin q\;dpdq$$ [14],

то интеграл

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x',\ y',\ z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\cos\left[(x'-x)a+(y'-y)b+\right.$$
$$\left.+(z'-z)c\right]dx'dy'dz'dadbdc$$

обратится в

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin q\;dpdq\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x',\ y',\ z')\cos\left[(x'-x-kt\cos p\sin q)a+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(y'-y-kt\sin p\sin q)b+(z'-z-kt\cos q)c\right]dx'dy'dz'dadbdc\right\},$$

но, в силу теоремы Фурье, он сведется к

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\psi(x+kt\cos p\sin q,\ \ y+kt\sin p\sin q,\ \ z+kt\cos q)\sin q\;dqdp.$$

Заменяя ψ через φ и дифференцируя по t, получим для интеграла

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x',\ y',\ z')\cos k\rho t\cos\left[(x'-x)a+(y'-y)b+\right.$$
$$\left.+(z'-z)c\right]dx'dy'dz'dadbdc$$

следующее значение:

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varphi(x+kt\cos p\sin q, y+kt\sin p\sin q, z+kt\cos q)\sin q\,dpdq,$$

так что формула

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\varphi(x',\ y',\ z')\cos k\rho t+\psi(x',\ y',\ z')\frac{\sin k\rho t}{k\rho}\right\}\cos\left[(x'-x)a+\right.$$
$$\left.+(y'-y)b+(z'-z)c\right]dx'dy'dz'dadbdc,$$

содержащая первые части функций u, v, w, сведется к

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq,$$

что гораздо проще.

Если положить в предыдущей формуле последовательно $\varphi=f$ и одновременно $\psi=F$, $\varphi=f_1$ и одновременно $\psi=F_1$, $\varphi=f_2$ и одновременно $\psi=F_2$, то для первых частей u, v, w получим соответственно следующие значения:

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq,$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_1(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq,$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_2(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_2(x+kt\cos p\sin q,\ y+kt\sin p\sin q,\ z+kt\cos q)\sin q\,dpdq.$$

IV. Рассмотрим теперь формулу

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dab+Eac+Fbc}{\rho^2}\right)(\cos k'\rho t-\cos k\rho t)\times$$

$$\times\cos[(x'-x)a+(y'-y)b+(z'-z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc,$$

содержащую вторые части функций u, v, w; при интегрировании по t между пределами 0 и t она даст также их третьи части.

Положим

$$a = \rho \cos p' \sin q', \quad b = \rho \sin p' \sin q', \quad c = \rho \cos q';$$

$$x' = x + r \cos p \sin q, \quad y' = y + r \sin p \sin q, \quad z' = z + r \cos q;$$

$$Y_0' = \frac{A+B+C}{3};$$

$$Y_2' = A \cos^2 p' \sin^2 q' + B \sin^2 p' \sin^2 q' + C \cos^2 q' + D \cos p' \sin p' \sin^2 q' +$$
$$+ E \cos p' \cos q' \sin q' + F \sin p' \cos q' \sin q' - \frac{A+B+C}{3};$$

тогда наша формула обратится в

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int (Y_0' + Y_2')(\cos k'\rho t - \cos k\rho t) \cos r\rho \, [\cos q \cos q' +$$
$$+ \sin q \sin q' \cos (p - p')] \, r^2 \rho^2 \sin q \sin q' \, dr dp dq d\rho dp' dq'.$$

Величины A, B, C, D, E, F, входящие в Y_0' и Y_2', являются теперь функциями переменных $x + r \cos p \sin q$, $y + r \sin p \sin q$, $z + r \cos q$, что касается пределов интегралов, содержащихся в последней формуле, то они будут: 0 и $\frac{1}{0}$ для переменных r и ρ; 0 и π для q и q'; 0 и 2π для p и p'.

Очень легко выполнить интегрирование по p' и q'. Действительно, подставим вместо $\cos r\rho \, [\cos q \cos q' + \sin q \sin q' \cos (p - p')]$ его значение

$$X_0 R - 2^2 \cdot 5 X_2 \frac{d^2 R}{d\vartheta^2} \vartheta + \text{ и т. д.,}$$

получаемое из формулы (3), и заметим, что Y_0' не зависит от величин p' и q', а Y_2', наоборот, есть функция трех величин $\cos p' \cos q'$, $\sin p' \sin q'$, $\cos q'$, рациональная, целая, второй степени и удовлетворяющая уравнению

$$0 = \frac{1}{\sin q'} \cdot \frac{d\left(\sin q' \frac{dY_2'}{dq'}\right)}{dq'} + \frac{1}{\sin^2 q'} \cdot \frac{d^2 Y_2'}{dp'^2} + 6 Y_2'.$$

Поэтому, пользуясь двумя известными теоремами

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y'_n X_m \sin q' dp' dq' = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y'_n X_n \sin q' dp' dq' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n,$$

где Y_n представляет результат подстановки в Y'_n величины p вместо p' и q вместо q', мы можем сразу же заменить нашу формулу, содержащую шестерной интеграл, следующей:

$$\frac{1}{2\pi^2}\int \left(Y_0 R\vartheta - 4Y_2 \frac{d^2R}{d\vartheta^2}\vartheta^2\right)(\cos k'\rho t - \cos k\rho t)\sin q\, d\rho dr dp dq,$$

содержащей лишь четверной интеграл. Пределы для переменных ρ, r, p, q будут те же, что и ранее, т. е. 0 и $\frac{1}{0}$ для двух первых, 0 и π для q, а 0 и 2π для последней; что касается функций Y_0 и Y_2, то они соответственно представляют собой то, во что обращаются величины Y'_0 и Y'_2, если заменим в них p' через p и q' через q, так что имеем

$$Y_0 = \frac{A+B+C}{3},$$

$$Y_2 = A\cos^2 p \sin^2 q + B\sin^2 p \sin^2 q + C\cos^2 q + D\cos p \sin p \sin^2 q +$$
$$+ E\cos p \cos q \sin q + F\sin p \cos q \sin q - \frac{A+B+C}{3}.$$

Так как $\vartheta = r^2\rho^2$, $R = \frac{\sin\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}$, то получим $R\vartheta = r\rho\sin r\rho$,

$$-4\frac{d^2R}{d\vartheta^2}\vartheta^2 = r\rho\sin r\rho + 3\cos r\rho - \frac{3\sin r\rho}{r\rho}.$$

Если подставим эти величины в последний четверной интеграл, то он обратится в

$$\frac{3}{2\pi^2}\int Y_2(\cos k\rho t - \cos k'\rho t)\frac{\sin r\rho}{r\rho}\sin q\; d\rho dr dq dp -$$
$$-\frac{3}{2\pi^2}\int Y_2(\cos k\rho t - \cos k'\rho t)\cos r\rho \sin q\; d\rho dr dq dp -$$
$$-\frac{1}{2\pi^2}\int (Y_0 + Y_2)(\cos k\rho t - \cos k'\rho t)\, r\rho \sin r\rho \sin q\; d\rho dr dq dp.$$

Обозначим через V предыдущее выражение и заменим для сокращения Y_2 через M, а

$$Y_0+Y_2=A\cos^2 p+B\sin^2 p\sin^2 q+C\cos^2 q+D\cos p\sin p\sin^2 q+$$
$$+E\cos p\cos q\sin q+F\sin p\cos q\sin q$$

через N, тогда будем иметь

$$V=\frac{3}{2\pi^2}\int M(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)\frac{\sin r\rho}{r\rho}\sin q\,d\rho dr dp dq-$$
$$-\frac{3}{2\pi^2}\int M(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)\cos r\rho\sin q\,d\rho dr dp dq-$$
$$-\frac{1}{2\pi^2}\int N(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)r\rho\sin r\rho\sin q\,d\rho dr dp dq.$$

Чтобы по возможности упростить интегралы, входящие в V, рассмотрим выражение

$$U=\int L(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)\frac{\sin\alpha r\rho}{r\rho}\sin q\,d\rho dr dq dp,$$

где L — функция p, q, r; α — вещественная положительная величина. Что касается пределов ρ, r, p, q, то они те же, что и в интегралах, содержащихся в V.

Дифференцируя по α, находим

$$\frac{dU}{d\alpha}=\int L(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)\cos\alpha r\rho\sin q\,d\rho dr dp dq,$$
$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}=-\int L(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)r\rho\sin\alpha r\rho\sin q\,d\rho dr dp dq.$$

Затем будем иметь

$$V=U-\frac{dU}{d\alpha}+\frac{d^2U}{d\alpha^2},$$

если положим $\alpha=1$, $L=\frac{3}{2\pi^2}M$ в функциях U и $\frac{dU}{d\alpha}$ и $\alpha=1$, $L=\frac{1}{2\pi^2}N$ в $\frac{d^2U}{d\alpha^2}$.

Величину U можно написать в виде

$$U=\int L\frac{\sin q}{r}dp dq dr\int_0^\infty(\cos k\rho t-\cos k'\rho t)\frac{\sin\alpha r\rho}{\rho}d\rho,$$

или

$$U=\frac{1}{2}\int L\frac{\sin q}{r}dpdqdr\int\limits_0^\infty\frac{\sin(ar-kt)\rho-\sin(ar-k't)\rho}{\rho}d\rho.$$

Но легко видеть, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin(ar-kt)\rho-\sin(ar-k't)\rho}{\rho}d\rho$$

равен нулю, когда $ar-kt<0$ или когда $ar-k't>0$, и что он равен π между $ar-kt=0$ и $ar-k't=0$, а для самих пределов $ar-kt=0$ и $ar-k't=0$ его значение равно $\frac{\pi}{2}$ [15]. Таким образом, величина U заключает под знаком $\int$ функцию

$$\frac{L\sin q}{r}\int\limits_0^\infty\frac{\sin(ar-kt)\rho-\sin(ar-k't)\rho}{\rho}d\rho$$

от величин p, q, r, которая имеет следующее свойство: она обращается в нуль, когда r меньше чем $\frac{kt}{a}$ или больше чем $\frac{k't}{a}$, и становится равной $\frac{\pi L}{r}\sin q$, когда r заключено в пределах от $\frac{kt}{a}$ до $\frac{k't}{a}$. Поэтому можно заменить эту функцию через $\frac{\pi L\sin q}{r}$, с тем чтобы пределы 0 и $\frac{1}{0}$, относящиеся к r, были заменены соответственно через $\frac{kt}{a}$ и $\frac{k't}{a}$. Тогда будем иметь

$$U=\frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{kt}{a}}^{\frac{k't}{a}}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{L\sin q}{r}dpdqdr.$$

В сущности, чтобы принять в расчет то, что имеет место на пределах $r=\frac{kt}{\alpha}$ и $r=\frac{k't}{\alpha}$, следовало бы написать

$$U=\frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{kt}{\alpha}}^{\frac{k't}{\alpha}}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{L\sin q\,dpdqdr}{r}+\frac{\alpha\pi dr}{4t}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{L''}{k'}-\frac{L'}{k}\right)\sin q\;dpdq,$$

где L'' и L' представляют соответственно результат подстановки в L значений $\frac{k't}{\alpha}$ и $\frac{kt}{\alpha}$ вместо r. Но второй член

$$\frac{\pi Ldr}{4t}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{L''}{k'}-\frac{L'}{k}\right)\sin q\;dpdq,$$

куда входит множителем dr, имеет ничтожно малую величину, и им можно пренебречь.

Нам нужно найти величины $\frac{dU}{d\alpha}$ и $\frac{d^2U}{d\alpha^2}$. Чтобы их получить, заметим, что U есть функция $\frac{t}{\alpha}$. Удобно выразить производные по α через производные по t.

Имеем

$$\alpha\frac{dU}{d\alpha}=-t\frac{dU}{dt},\qquad \alpha^2\frac{d^2U}{d\alpha^2}=\frac{d\left(t^2\frac{dU}{dt}\right)}{dt}.$$

Теперь мы можем положить $\alpha=1$, ибо достаточно иметь U и ее производные для этого значения α; получим

$$U=\frac{\pi}{2}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{L\sin q}{r}\,dpdqdr,$$

$$\frac{dU}{d\alpha}=-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(L''-L')\sin q\;dpdq,$$

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}=\frac{\pi}{2}\frac{d}{dt}\,t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(L''-L')\sin q\;dpdq.$$

Если заменить L через $\frac{3}{2\pi^2}M$ в двух первых уравнениях и через $\frac{1}{2\pi^2}N$ в последнем и подставить результаты в формулу

$$V = U - \frac{dU}{d\alpha} + \frac{d^2U}{d\alpha^2},$$

то получим

$$V = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(N''-N')\sin q\,dpdq + \frac{3}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(M''-M')\sin q\,dpdq +$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{M\sin q}{r}\,dpdqdr. \qquad \text{(A)}$$

M'' и M' представляют соответственно то, во что обращается M, если положить $r=k't$ и $r=kt$; точно так же N'' есть значение N для $r=k't$, а N' значение N для $r=kt$.

V. Мы упростили, насколько было возможно, и первые части функций u, v, w, и формулу, содержащую их вторые части; интегрируя эту последнюю, как было сказано, по t от $t=0$ до любого t, найдем выражение

$$\frac{1}{4\pi}t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(N''-N')\sin q\,dpdq + \frac{3}{4\pi}\int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(M''-M')\sin q\,dpdqdt +$$

$$+\frac{3}{4\pi}\int_0^t\int_{kt}^{k't}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{M\sin q}{r}\,dpdqdrdt, \qquad \text{(B)}$$

которое содержит последние части величин u, v, w. Остается теперь дать функциям A, B, C, D, E, F подходящие значения, чтобы получить члены, составляющие вторые и последние части u, v, w. Мы будем писать для сокращения вместо такой функции, как

$$\varphi(x + r\cos p\sin q,\ y + r\sin p\sin q,\ z + kt\cos q),$$

просто φ, а вместо

$$\varphi(x + kt\cos p\sin q, y + kt\sin p\sin q, z + kt\cos q)$$

и

$$\varphi(x + k't\cos p\sin q, y + k't\sin p\sin q, z + k't\cos q)$$

соответственно φ' и φ''. Тогда, чтобы получить вторую часть u, нужно положить в формуле (A)

$$A=f,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=f_1,\quad E=f_2,\quad F=0,$$

а для третьей части того же u надо положить в формуле (B)

$$A=F,\quad B=0,\quad C=0,\quad D=F_1,\quad E=F_2,\quad F=0;$$

если мы вспомним, что

$$M=A\cos^2 p\sin^2 q+B\sin^2 p\sin^2 q+C\cos^2 q+D\sin p\cos p\sin^2 q+$$
$$+E\cos p\cos q\sin q+F\sin p\cos q\sin q-\frac{A+B+C}{3},$$
$$N=A\cos^2 p\sin^2 q+B\sin^2 p\sin^2 q+C\cos^2 q+D\sin p\cos p\sin^2 q+$$
$$+E\cos p\cos q\sin q+F\sin p\cos q\sin q,$$

то найдем для второй части u

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\sin q+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+$$
$$+(f_2''-f_2')\cos q]\cos p\sin^2 q\;dpdq+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3\,[(f''-f')\cos p\sin q+$$
$$+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+(f_2''-f_2')\cos q]\cos p\sin q-(f''-f')\}\sin q\,dpdq+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3\,(f\cos p\sin q+f_1\sin p\sin q+f_2\cos q)\cos p\sin q-f]\times$$
$$\times\frac{\sin q}{r}\,dpdqdr,$$

а для третьей части

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos p\sin q+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+$$
$$+(F_2''-F_2')\cos q]\cos p\sin^2 q\;dpdq+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3\,[(F''-F')\cos p\sin q+$$
$$+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+(F_2''-F_2')\cos q]\cos p\sin q-$$

$$-(F''-F')\}\sin q\; dpdqdt+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[3(F\cos p\sin q+F_1\sin p\sin q+$$

$$+F_2\cos q)\cos p\sin q-F]\frac{\sin q}{r}dpdqdrdt.$$

Формула (A), если в ней положить

$$A=0,\quad B=f_1,\quad C=0,\quad D=f,\quad E=0,\quad F=f_2,$$

даст для второй части v

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\sin q+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+$$

$$+(f_2''-f_2')\cos q]\sin p\sin^2 q\; dpdq+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos p\sin q+$$

$$+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+(f_2''-f_2')\cos q]\sin p\sin q-(f_1''-f_1')\}\sin q\; dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[3(f\cos p\sin q+f_1\sin p\sin q+f_2\cos q)\sin p\sin q-$$

$$-f_1]\frac{\sin q}{r}dpdqdr.$$

Заменяя f через F и интегрируя по t от $t=0$ до какого-либо t, надем для третьей части v выражение

$$\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(F''-F')\cos p\sin q+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+$$

$$+(F_2''-F_2')\cos q]\sin p\sin^2 q\; dpdq+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{[3(F''-F')\cos p\sin q+$$

$$+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+(F_2''-F_2')\cos q]\sin p\sin q-$$

$$-(F_1''-F_1')\}\sin q\,dpdqdt+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(F\cos p\sin q+F_1\sin p\sin q+$$

$$+F_2\cos q)\sin p\sin q-F_1]\,\frac{\sin q}{r}\,dpdqdrdt.$$

Наконец, полагая

$$A=0,\quad B=0,\quad C=f_2,\quad D=0,\quad E=f,\quad F=f_1$$

в формуле (A) и

$$A=0,\quad B=0,\quad C=F_2,\quad D=0,\quad E=F,\quad F=F_1$$

в (B), получим вторую часть w, равную

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\,t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\,\sin q+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+$$

$$+(f_2''-f_2')\cos q]\cos q\sin q\,dpdq+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3\,[(f''-f')\cos p\sin q+$$

$$+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+(f_2''-f_2')\cos q]\cos q-(f_2''-f_2')\}\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(f\cos p\sin q+f_1\sin p\sin q+f_2\cos q)\cos q-f_2]\times$$

$$\times\frac{\sin q}{r}\,dpdqdr,$$

и третью часть, равную

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos p\sin q+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+$$

$$+(F_2''-F_2')\cos q]\cos q\sin q\,dpdq+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3\,[(F''-F')\cos p\sin q+$$

$$+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+(F_2''-F_2')\cos q]\cos q-(F_2''-F_2')\}\sin q\,dpdqdt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[3(F\cos p\sin q+F_1\sin p\sin q+F_2\cos q)\cos q-F_2]\times$$

$$\times\frac{\sin q}{r}\,dpdqdrdt.$$

Соединяя три части каждой из величин u, v, w, найдем для этих величин следующие значения:

$$u=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F'\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\sin q+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+$$

$$+(f_2''-f_2')\cos q]\cos p\sin^2 q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[(F''-F')\cos p\sin q+$$

$$+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+(F_2''-F_2')\cos q]\cos p\sin^2 q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos p\sin q+(f_1''-f_1')\sin p\sin q+$$

$$+(f_2''-f_2')\cos q]\cos p\sin q-(f''-f')\}\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos p\sin q+(F_1''-F_1')\sin p\sin q+$$

$$+(F_2''-F_2')\cos q]\cos p\sin q-(F''-F')\}\sin q\,dpdqdt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[3(f\cos p\sin q+f_1\sin p\sin q+f_2\cos q)\cos p\sin q-f]\times$$

$$\times\frac{\sin q}{r}\,dpdqdr+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}[3(F\cos p\sin q+F_1\sin p\sin q+$$

$$+F_2\cos q)\cos p\sin q-F]\frac{\sin q}{r}\,dpdqdrdt,$$

$$v=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f'_1\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F'_1\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\sin q+(f''_1-f'_1)\sin p\sin q+$$

$$+(f''_2-f'_2)\cos q]\sin p\sin^2 q\,dpdq+\frac{1}{4\pi}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(F''-F')\cos p\sin q+$$

$$+(F''_1-F'_1)\sin p\sin q+(F''_2-F'_2)\cos q]\sin p\sin^2 q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(f''-f')\cos p\sin q+(f''_1-f'_1)\sin p\sin q+$$

$$+(f''_2-f'_2)\cos q]\sin p\sin q-(f''_1-f'_1)\}\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\{3[(F''-F')\cos p\sin q+(F''_1-F'_1)\sin p\sin q+$$

$$+(F''_2-F'_2)\cos q]\sin p\sin q-(F''_1-F'_1)\}\sin q\,dpdqdt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(f\cos p\sin q+f_1\sin p\sin q+f_2\cos q)\sin p\sin q-f_1]\times$$

$$\times\frac{\sin q}{r}dpdqdr+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[3(F\cos p\sin q+F_1\sin p\sin q+$$

$$+F_2\cos q)\sin p\sin q-F_1]\frac{\sin q}{r}dpdqdrdt,$$

$$w=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_2\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F'_2\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(f''-f')\cos p\sin q+(f''_1-f'_1)\sin p\sin q+$$

$$+ (f_2'' - f_2')\cos q]\cos q \sin q \; dpdq + \frac{t}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} [(F'' - F')\cos p \sin q +$$

$$+ (F_1'' - F_1')\sin p \sin q + (F_2'' - F_2')\cos q]\cos q \sin q \; dpdq +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \{3[(f'' - f')\cos p \sin q + (f_1'' - f_1')\sin p \sin q +$$

$$+ (f_2'' - f_2')\cos q]\cos q - (f_2'' - f_2')\}\sin q \; dpdq +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \{3[(F'' - F')\cos p \sin q + (F_1'' - F_1')\sin p \sin q +$$

$$+ (F_2'' - F_2')\cos q]\cos q - (F_2'' - F_2')\}\sin q \; dpdqdt +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} [3(f\cos p \sin q + f_1 \sin p \sin q + f_2 \cos q)\cos q - f_2] \times$$

$$\times \frac{\sin q}{r}\, dpdqdr + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} [3(F\cos p \sin q + F_1 \sin p \sin q +$$

$$+ F_2 \cos q)\cos q - F_2]\frac{\sin q}{r}\, dpdqdrdt.$$

Эти значения совпадают с теми, которые дал г-н Пуассон в мемуаре [16], доложенном им Парижской Академии наук 11 октября 1830 г.

VI. Можно получить значения функций u, v, w в другой форме, пользуясь другим способом упрощения шестерных интегралов параграфа II. Мы ни в чем не будем изменять способ сокращения *первых частей* u, v, w; займемся их *вторыми частями*. Что касается *третьих частей*, то они получатся из вторых путем замены f через F и интегрирования по t от $t = 0$ до некоторого t. Если положим

$$-\Phi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P\,\frac{\cos k'\rho t - \cos k\rho t}{\rho^2}\sin[(x' - x)a + [y' - y)b +$$

$$+ (z' - z)c]\,dx'dy'dz'dadbdc,$$

то будем иметь соответственно для вторых частей u, v, w следующие значения:

$$\frac{d\Phi}{dx};\quad \frac{d\Phi}{dy},\quad \frac{d\Phi}{dz}.$$

Так как $P = af(x', y' z') + bf_1(x', y', z') + cf_2(x', y', z')$, то мы сможем написать [17]

$$-\left[\frac{d}{dx} f(x', y', z') + \frac{d}{dy} f_1(x', y', z') + \frac{d}{dz} f_2(x', y', z')\right] \cos[(x - x') a + (y - y') b + (z - z') c]$$

вместо

$$-P \sin[(x' - x) a + (y' - y) b + (z' - z) c],$$

а так как, кроме того,

$$\frac{\cos k'\rho t - \cos k\rho t}{\rho^2} = -\int\limits_{kt}^{k't} \frac{\sin \rho r}{\rho}\, dr,$$

то получим

$$\Phi = \int\limits_{kt}^{k't} dr \left\{ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dx} f(x', y', z') + \frac{d}{dy} f_1(x', y', z') + \frac{d}{dz} f_2(x', y', z')\right] \frac{\sin \rho r}{\rho} \cos[(x' - x) a + (y' - y) b + (z' - z) c]\, dx'dy'dz'dadbdc \right\}.$$

Но, как мы знаем,

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', y', z') \frac{\sin \rho r}{\rho} \cos[(x' - x) a + (y' - y) b + (z' - z) c] \times dx'dy'dz'dadbdc = \frac{r}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma) \sin q\ dpdq;$$

поэтому будем иметь также

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\frac{d}{dx}f(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)+$$

$$+\frac{d}{dy}f_1(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)+$$

$$+\frac{d}{dz}f_2(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)\Big]r\sin q\ dpdqdr;$$

здесь для сокращения пишем $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ соответственно вместо $\cos p\sin q$, $\sin p\sin q$, $\cos q$. Если заменим f через F и обозначим через θ значение, которое примет Φ, так что

$$\theta=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{kt}^{k't}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big[\frac{d}{dx}F(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)+$$

$$+\frac{d}{dy}F_1(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)+$$

$$+\frac{d}{dz}F_2(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)\Big]r\sin q\ dpdqdr,$$

то будем иметь

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^t\theta dt,\quad \frac{d}{dy}\int\limits_0^t\theta dt,\quad \frac{d}{dz}\int\limits_0^t\theta dt$$

соответственно для третьих частей u, v, w.

Сохраним по-прежнему для сокращения обозначения параграфа V по отношению к функциям f, F; мы будем иметь, согласно предыдущему,

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'\sin q\ dpdq+\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F'\sin q\ dpdq+\frac{d\Phi}{dx}+\int\limits_0^t\frac{d\theta}{dx}dt,\\
v&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'_1\sin q\ dpdq+\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F'_1\sin q\ dpdq+\frac{d\Phi}{dy}+\int\limits_0^t\frac{d\theta}{dy}dt,\\
w&=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'_2\sin q\ dpdq+\frac{t}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}F'_2\sin q\ dpdq+\frac{d\Phi}{dz}+\int\limits_0^t\frac{d\theta}{dz}dt.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Если бы мы желали избавиться от дифференциалов под знаками $\int$ в Φ и θ, то этого легко достигнуть, поступая следующим образом. Будем рассматривать только Φ и для простоты напишем его значение в виде

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dz}\right)\frac{r^2\sin q\ dpdqdr}{r}.$$

Полагая $x' = r\cos\alpha$, $y' = r\cos\beta$, $z' = r\cos\gamma$, найдем

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{df}{dx}+\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dz}\right)\frac{dx'dy'dz'}{r}.$$

Величины f, f_1, f_2, которые были функциями $x+r\cos\alpha$, $y+$ $+r\cos\beta$, $z=r\cos\gamma$, станут функциями $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, так что можно будет написать

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{df}{dx'}+\frac{df_1}{dy'}+\frac{df_2}{dz'}\right)\frac{dx'dy'dz'}{r},$$

где интеграл взят по всему объему, заключенному между двумя сферами с радиусами kt и $k't$.

Имеем тождественно

$$\left(\frac{df}{dx'}+\frac{df_1}{dy'}+\frac{df_2}{dz'}\right)\frac{1}{r} = \frac{fx'+f_1y'+f_2z'}{r^3}+\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}.$$

Поэтому

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int(fx'+f_1y'+f_2z')\frac{dx'dy'dz'}{r^3}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}\right]dx'dy'dz'.$$

Но если мы имеем тройной интеграл

$$\int\left(\frac{dP}{dx'}+\frac{dQ}{dy'}+\frac{dR}{dz'}\right)dx'dy'dz',$$

распространенный по объему слоя, заключенного между двумя данными криволинейными поверхностями, то его можно преобразовать в двойные интегралы при помощи формулы [18]

$$\int\left(\frac{dP}{dx'}+\frac{dQ}{dy'}+\frac{dR}{dz'}\right)dx'dy'dz'=\int(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,ds-$$

$$-\int(P\cos\lambda'+Q\cos\mu'+R\cos\nu')\,ds',$$

где λ, μ, ν представляют углы, образуемые нормалью к внешней поверхности с координатными осями; λ', μ', ν' — те же углы для внутренней поверхности; ds и ds' — соответственно элементы внешней и внутренней поверхности. Интегралы второй части берутся: первый — по всем точкам внешней поверхности, второй — по всей внутренней поверхности.

Посредством этой общей формулы интеграл

$$\int\left[\frac{d\left(\frac{f}{r}\right)}{dx'}+\frac{d\left(\frac{f_1}{r}\right)}{dy'}+\frac{d\left(\frac{f_2}{r}\right)}{dz'}\right]dx'dy'dz'$$

может быть заменен интегралом

$$k't\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(f''\cos\alpha+f_1''\cos\beta+f_2''\cos\gamma)\sin q\;dpdq-$$

$$-kt\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(f'\cos\alpha+f_1'\cos\beta+f_2'\cos\gamma)\sin q\;dpdq.$$

Поэтому будем иметь, возвращаясь к полярным координатам,

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\;f(x+r\cos\alpha,\;y+r\cos\beta,\;z+r\cos\gamma)+$$

$$+\cos\beta\;f_1(x+r\cos\alpha,\;y+r\cos\beta,\;z+r\cos\gamma)+$$

$$+\cos\gamma\;f_2(x+r\cos\alpha,\;y+r\cos\beta,\;z+r\cos\gamma)]\sin q\;drdpdq+$$

$$+\frac{k't}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\;f(x+k't\cos\alpha,\;y+k't\cos\beta,\;z+k't\cos\gamma)+$$

$$+\cos\beta\, f_1(x+k't\cos\alpha,\ y+k't\cos\beta,\ z+k't\cos\gamma)+$$
$$+\cos\gamma\, f_2(x+k't\cos\alpha,\ y+k't\cos\beta,\ z+k't\cos\gamma)]\sin q\, dpdq-$$
$$-\frac{kt}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\, f(x+kt\cos\alpha,\ y+kt\cos\beta,\ z+kt\cos\gamma)+$$
$$+\cos\beta\, f_1(x+kt\cos\alpha,\ y+kt\cos\beta,\ z+kt\cos\gamma)+$$
$$+\cos\gamma\, f_2(x+kt\cos\alpha,\ y+kt\cos\beta,\ z+kt\cos\gamma)]\sin q\, dpdq.$$

Заменяя f через F, получим

$$\theta=\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\, F(x+r\cos\alpha,\ \ldots)+\cos\beta\, F_1(x+r\cos\alpha,\ \ldots)+$$
$$+\cos\gamma\, F_2(x+r\cos\alpha,\ \ldots)]\sin q\, dpdqdr+$$
$$+\frac{k't}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\, F(x+k't\cos\alpha,\ \ldots)+\cos\beta\, F_1(x+k't\cos\alpha,\ \ldots)+$$
$$+\cos\gamma F_2(x+k't\cos\alpha,\ \ldots)]\sin q\, dpdq-$$
$$-\frac{kt}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\alpha\, F(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)+\cos\beta\, F_1(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)+$$
$$+\cos\gamma\, F_2(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)]\sin q\, dpdq.$$

Эти значения Φ и θ могут быть подставлены в интегралы (8).

VII. Интегралы (8) показывают, что

$$udx+vdy+wdz$$

есть полный дифференциал всегда, когда полными являются дифференциалы

$$dxf(x,\ y,\ z)+dyf_1(x,\ y,\ z)+dzf_2(x,\ y,\ z)$$

и

$$dxF(x,\ y,\ z)+dyF_1(x,\ y,\ z)+dzF_2(x,\ y,\ z),$$

т. е.

$$udx+vdy+wdz \qquad (\text{для } t=0)$$

и

$$\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz \qquad (\text{для } t=0).$$

Пусть

$$dxf(x, y, z)+dyf_1(x, y, z)+dzf_2(x, y, z)=d\psi(x, y, z),$$

$$dxF(x, y, z)+dyF_1(x, y, z)+dzF_2(x, y, z)=d\Psi(x, y, z),$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+kt\cos\alpha, \ldots)\sin q\,dpdq+$$

$$+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x+kt\cos\alpha, \ldots)\sin q\,dpdq=M;$$

тогда получим

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f'\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F'\sin q\,dpdq=\frac{dM}{dx},$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_1'\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_1'\sin q\,dpdq=\frac{dM}{dy},$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_2'\sin q\,dpdq+\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_2'\sin q\,dpdq=\frac{dM}{dz},$$

$$\Phi=\frac{1}{4\pi}\int_{kt}^{k't}dr\left[\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\right.$$

$$\left.z+r\cos\gamma)\right]\cdot r\sin q\,dpdq.$$

Но интеграл

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma)\,r\sin q\,dpdq=w$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2w}{dr^2}=\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\ [19];$$

поэтому имеем

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + k't\cos\alpha, \ldots)\sin q\, dpdq -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + kt\cos\alpha, \ldots)\sin q\, dpdq.$$

Заменяя ψ через Ψ, находим

$$\theta = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + k't\cos\alpha, \ldots)\sin q\, dpdq -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} t \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + kt\cos\alpha, \ldots)\sin q\, dpdq.$$

Полагая для сокращения $M + \Phi + \int_0^t \theta dt = \varphi$, получим, в силу предшествующих формул,

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + k't\cos\alpha, \ldots)\, t\sin q \cdot dpdq +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(x + k't\cos\alpha, \ldots)\, t\sin q\, dpdq;$$

то же усматривается и из интегрирования уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = k'^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

которому φ должно удовлетворять [20].

Если бы

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz \qquad (\text{для } t = 0)$$

было полным дифференциалом, а

$$udx + vdy + wdz \qquad (\text{для } t = 0)$$

не было полным дифференциалом, то, полагая

$$\frac{du}{dt}\,dx + \frac{dv}{dt}\,dy + \frac{dw}{dt}\,dz = d\Psi(x, y, z),$$

мы получили бы следующие уравнения:

$$u = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} f't\sin q\; dpdq + \frac{d\Phi}{dx} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dx}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \Psi(x + k'\,t\cos\alpha,\;\ldots)\,t\sin q\; dpdq,$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} f_1'\,t\sin q\; dpdq + \frac{d\Phi}{dy} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dy}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \Psi(x + k't\cos\alpha,\;\ldots)\,t\sin q\; dpdq,$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} f_2'\,t\sin q\, dpdq + \frac{d\Phi}{dz} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dz}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \Psi(x + k't\cos\alpha,\;\ldots)\,t\sin q\; dpdq.$$

Нетрудно написать уравнения, которые получились бы, если бы

$$udx + vdy + wdz \qquad (\text{для } t = 0)$$

было полным дифференциалом, а

$$\frac{du}{dt}\,dx + \frac{dv}{dt}\,dy + \frac{dw}{dt}\,dz \qquad (\text{для } t = 0)$$

не было бы полным дифференциалом.

VIII. Полезно доказать, что интегралы (8) удовлетворяют уравнениям (5) и условиям

$$\left.\begin{array}{ll} u=f(x, y, z), & \frac{du}{dt}=F(x, y, z) \\ v=f_1(x, y, z), & \frac{dv}{dt}=F_1(x, y, z) \\ w=f_2(x, y, z), & \frac{dw}{dt}=F_2(x, y, z) \end{array}\right\} \quad \text{для } t=0. \tag{9}$$

Чтобы легче это сделать, обозначим соответственно через P, P', P'' члены в u, v, w, зависящие от f, а через Q, Q', Q'' соответственно то, во что обращаются P, P', P'' при замене f через F, так что

$$u=P+\int_0^t Qdt, \qquad \frac{du}{dt}=\frac{dP}{dt}+Q;$$

$$v=P'+\int_0^t Q'dt, \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{dP'}{dt}+Q';$$

$$w=P''+\int_0^t Q''dt, \qquad \frac{dw}{dt}=\frac{dP''}{dt}+Q'';$$

$$P=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f't\sin q\, dpdq+\frac{d\Phi}{dx}, \quad Q=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F't\sin q\, dpdq+\frac{d\theta}{dx};$$

$$P'=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_1't\sin q\, dpdq+\frac{d\Phi}{dy}, \quad Q'=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F_1't\sin q\, dpdq+\frac{d\theta}{dy};$$

$$P''=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_2't\sin q\, dpdq+\frac{d\Phi}{dz}, \quad Q''=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F_2't\sin q\, dpdq+\frac{d\theta}{dz}.$$

Полагая $t=0$ в P, P', P'', находим сразу же

$$P=f(x, y, z), \quad P'=f_1(x, y, z), \quad P''=f_2(x, y, z);$$

поэтому при замене f через F имеем для $t=0$

$$Q=F(x, y, z), \quad Q'=F_1(x, y, z), \quad Q''=F_2(x, y, z).$$

Легко видеть, что $\frac{d\Phi}{dt}$ обращается в нуль при $t=0$; следовательно, для этого значения времени

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f't\sin q\;dpdq.$$

Но интеграл

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f't\sin q\;dpdq=W$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2w}{dt^2}=k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right),$$

поэтому для $t=0$

$$\frac{dP}{dt}=\frac{t}{4\pi}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f't\sin q\;dpdq=0.$$

Таким же образом найдем, что производные $\frac{dP'}{dt}$, $\frac{dP''}{dt}$ равны нулю при $t=0$, так что для $t=0$ имеем

$$\frac{dP}{dt}=0, \quad \frac{dP'}{dt}=0, \quad \frac{dP''}{dt}=0,$$

а заменяя f через F, находим для того же значения времени

$$\frac{dQ}{dt}=0, \quad \frac{dQ'}{dt}=0, \quad \frac{dQ''}{dt}=0.$$

Нетрудно видеть из предыдущего, что условия (9) выполнены. Но чтобы убедиться в том, что удовлетворены и уравнения (5), представим их в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}&=Au+Bv+Cw,\\ \frac{d^2v}{dt^2}&=A'u+B'v+C'w,\\ \frac{d^2w}{dt^2}&=A''u+B''v+C''v,\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

где A, B, C, A', ... — целые функции операторов $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$.

Интегрируя уравнения (10) по t от $t=0$, найдем

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}-\left(\frac{du}{dt}\right)_0&=A\int_0^t udt+B\int_0^t vdt+C\int_0^t wdt,\\ \frac{dv}{dt}-\left(\frac{dv}{dt}\right)_0&=A'\int_0^t udt+B'\int_0^t vdt+C'\int_0^t wdt,\\ \frac{dw}{dt}-\left(\frac{dw}{dt}\right)_0&=A''\int_0^t udt+B''\int_0^t vdt+C''\int_0^t wdt.\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Уравнения (11), в которых $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)_0$ представляют соответственно значения $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ при $t=0$, имеют место одновременно с уравнениями (10); они являются необходимым их следствием. Если бы мы подставили в уравнения (10) вместо u, v, w соответственно интегралы $\int_0^t udt$, $\int_0^t vdt$, $\int_0^t wdt$, то получили бы уравнения

$$\frac{du}{dt}=A\int_0^t udt+B\int_0^t vdt+C\int_0^t wdt,$$

$$\frac{dv}{dt}=A'\int_0^t udt+B'\int_0^t vdt+C'\int_0^t wdt,$$

$$\frac{dw}{dt}=A''\int_0^t udt+B''\int_0^t vdt+C''\int_0^t wdt,$$

которые могли бы иметь место лишь при

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0=0,\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_0=0,\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_0=0.$$

Но если значения u, v, w, удовлетворяющие уравнениям (10) в то же время таковы, что

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0=0,\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_0=0,\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_0=0,$$

то интегралы $\int_0^t udt$, $\int_0^t vdt$, $\int_0^t wdt$, будучи подставлены вместо u, v, w, также будут удовлетворять этим уравнениям.

Мы видели, что

$$\frac{dQ}{dt}=0,\ \frac{dQ'}{dt}=0,\ \frac{dQ''}{dt}=0 \qquad (\text{для } t=0);$$

следовательно,

$$\int_0^t Qdt,\ \int_0^t Q'dt,\ \int_0^t Q''dt,$$

будучи подставлены соответственно вместо u, v, w в уравнения (5), будут им удовлетворять, если $u=Q$ $v=Q'$, $w=Q''$ им удовлетворяют. А так как Q, Q', Q'' представляют соответственно значения P, P', P'', если заменить в них произвольные функции f через F, то очевидно, что значения $u=Q$, $v=Q'$, $w=Q''$ будут удовлетворять уравнениям (5), если им удовлетворяют $u=P$,

$v=P'$, $w=P''$. Итак, если значения $u=P$, $v=P'$, $w=P''$ удовлетворяют линейным уравнениям (5), то

$$u=\int_0^t Q dt,\quad v=\int_0^t Q' dt,\quad w=\int_0^t Q'' dt,$$

и, следовательно,

$$u=P+\int_0^t Q dt,\quad v=P'+\int_0^t Q' dt,\quad w=P''+\int_0^t Q'' dt$$

также будут им удовлетворять.

Итак, все сводится к тому, чтобы доказать, что значения

$$u=P,\ v=P',\ w=P''$$

удовлетворяют уравнениям (5). Так как функции f, f_1, f_2, входящие в P, P', P'', произвольны и не зависят друг от друга, то невозможно, чтобы после подстановки $u=P$, $v=P'$, $w=P''$ в уравнения (5) члены, зависящие от одной из этих функций, сократились с членами, зависящими от двух других. Поэтому члены, зависящие от f, должны отдельно удовлетворять уравнениям (5), равно как и члены, зависящие от f_1 и f_2. Более того, если нам удастся доказать, что члены, зависящие от одной из функций f, удовлетворяют уравнениям (5), то мы будем вправе заключить, что члены, зависящие от двух других функций, будут в отдельности удовлетворять этим уравнениям. Ибо применяя вычисления, сделанные для одной из функций f, к двум другим, можно доказать относительно этих последних то, что было доказано для первой.

Для сокращения положим

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f't\sin q\, dp dq=L,$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f''t\sin q\, dp dq=L',\quad \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} fr\sin q\, dp dq=M;$$

мы докажем, что

$$u=L+\int_{kt}^{k't}\frac{d^2M}{dx^2}dr,\quad v=\int_{kt}^{k't}\frac{d^2M}{dxdy}dr,\quad w=\int_{kt}^{k't}\frac{d^2M}{dxdz}dr$$

удовлетворяют уравнениям (5).

Замечая, что

$$\frac{d^2L}{dt^2}=k^2\left(\frac{d^2L}{dx^2}+\frac{d^2L}{dy^2}+\frac{d^2L}{dz^2}\right),$$

$$\frac{d^2L'}{dt^2}=k^2\left(\frac{d^2L'}{dx^2}+\frac{d^2L'}{dy^2}+\frac{d^2L'}{dz^2}\right),$$

$$\frac{d^2M}{dr^2}=\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{d^2M}{dy^2}+\frac{d^2M}{dz^2},$$

мы получим

$$\vartheta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{dL}{dx}+\frac{d}{dx}\int_{kt}^{k't}\left(\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{d^2M}{dy^2}+\frac{d^2M}{dz^2}\right)dr=\frac{dL'}{dx},$$

и уравнения (5) обратятся в

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^2L'}{dx^2},\\ \frac{d^2v}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^2L'}{dxdy},\\ \frac{d^2w}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^2L'}{dxdz}).\end{aligned}\right\}\qquad(5\,\text{bis})$$

Слагаемые в первом уравнении, в которые входит L, очевидно сокращаются; поэтому можно написать в этом уравнении просто

$$\int_{kt}^{k't}\frac{d^2M}{dx^2}dr$$

вместо u, откуда получим

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dx^2}-\frac{d^2L}{dx^2},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=k'^2\,\frac{d^2L'}{dx^2}-k^2\frac{d^2L}{dx^2},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dxdy}-\frac{d^2L}{dxdy},$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}=k'^2\frac{d^2L'}{dxdy}-k^2\frac{d^2L}{dxdy},$$

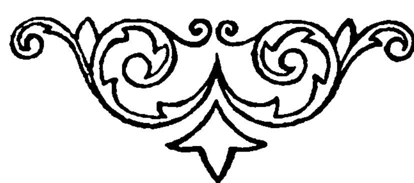
$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{d^2L'}{dxdz}-\frac{d^2L}{dxdz},$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}=k'^2\frac{d^2L'}{dxdz}-k^2\frac{d^2L}{dxdz}.$$

Подставляя эти значения в уравнения (5 bis) и вспоминая, что $k'^2=3k^2$, можно видеть непосредственно, что уравнения удовлетворяются, откуда и следует, что интегралы (8) удовлетворяют уравнениям (5).

Мы имеем в виду вернуться к уравнениям в частных производных и показать, каким образом обобщенные формулы параграфа I могут служить для нахождения интегралов более сложных уравнений, чем те, которые мы рассматривали в этой работе [[21]].

МЕХАНИКА



ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО МОМЕНТОВ СИЛ

Принцип виртуальных скоростей, которым мы обязаны Ивану Бернулли, оставался бесплодным в смысле вытекающих из него следствий, пока Лагранж не положил его в основу своей «Аналитической механики», изумительного труда, изменившего всю науку о равновесии и движении. Лагранж не удовлетворился тем, что вывел следствия из принципа Ивана Бернулли, но расширил и обобщил самый принцип и приложил его к решению труднейших вопросов равновесия и движения систем. Затем вопрос сочли исчерпанным и полагали, что ничего нельзя уже прибавить к теориям, установленным Лагранжем.

Однако со времени опубликования «Аналитической механики» * математики заметили, что принцип виртуальных скоростей еще шире, чем предполагал сам Лагранж. Этот великий математик считал, как и Иван Бернулли, что для равновесия системы необходимо, чтобы полный момент, т. е. сумма моментов всех сил, был равен нулю для всех перемещений, которым может быть подвержена система. Между тем математики заметили, что Лагранж требовал слишком многого и что для равновесия достаточно, чтобы полный момент системы не мог принимать положительного значения для всех возможных перемещений [1], так что если для всех этих перемещений значение момента отрицательно, то равновесие обеспечено. Принцип виртуальных скоростей, представленный в этой форме, приобретает бо́льшую общность, допускает

---

* 1788 г.

большее число приложений и обнимает действительно все вопросы, которые можно поставить по отношению к равновесию сил.

Весьма удивительно, что в новом издании «Аналитической механики», издании, вышедшем в то время, когда принцип виртуальных скоростей был уже понят во всей его широте, Лагранж ни в какой мере не воспользовался тем обстоятельством, что при равновесии сил полный момент может приобретать отрицательное значение; более того, он до известной степени отстранил его, когда оно представилось как бы само собой при данном им доказательстве принципа виртуальных скоростей;* и, не обратив на него внимания, великий математик не полностью перечислил возможные перемещения в большинстве вопросов первой части «Аналитической механики». Легко установить, что перемещения, которые он не счел нужным рассмотреть, не исключены никакими условиями, так что если удовлетворяются все те уравнения, которые он дал для равновесия, последнее все же может не иметь места.

В этой работе мы ставим себе целью провести анализ относящийся к применению принципа виртуальных скоростей, рассматриваемого во всей его широте, и дополнить решение некоторых вопросов, поставленных в первой части «Аналитической механики».

I. Обозначим через P, Q, R, ... силы, приложенные к некоторой системе, а через $Pdp+Qdq+Rdr+\ldots$ полный момент всех сил, относящийся к какому-либо перемещению. Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы дифференциал $Pdp+Qdq+Rdr+\ldots$ не был положительным ни при каком возможном перемещении.

Очевидно, что нельзя и говорить о нахождении условий равновесия системы, которая не вполне определена. В определение системы должно входить полное перечисление всех перемещений, которым она может быть подвержена, и чтобы отличить эти перемещения от тех, которых эта система никогда не может принять по причине препятствий, этому противодействующих,

* «Аналитическая механика», издание 1811 г., стр. 25 и 26.

необходимо знать условия, которым удовлетворяют только возможные перемещения и не удовлетворяют — невозможные.

Условия, о которых идет речь, чаще всего выражаются линейными функциями величин, определяющих перемещения системы, функциями, из которых ни одна не может изменить знака, если мы рассматриваем только возможные перемещения; так что если обозначить через dL, dM, ... эти функции, то величины dL, dM, ... будут равны нулю для одних возможных перемещений и не будут равны нулю для других; но ни одна из них не может изменить знака, если только мы не переходим от возможных перемещений к таким, которые не являются возможными [2].

Когда это установлено, ясно, что вместо бесконечно малых изменений [3], содержащихся линейно в dp, dq, dr, .., можно ввести то же число других изменений $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ..., которые будут связаны с первыми изменениями уравнениями первой степени; каждый дифференциал dp, dq, dr, ... станет тогда линейной функцией $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ..., и полный момент $Pdp+Qdq+Rdr\ldots$ примет вид

$$Ad\xi+Bd\eta+Cd\zeta+\ldots$$

Так как все дифференциалы dL, dM, ... связаны уравнениями первой степени с дифференциалами [координат], входящими в dp, dq, dr, ..., то в число величин $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ... можно включить dL, dM, ..., что даст для полного момента выражение вида

$$\lambda dL+\mu dM+\ldots+Ad\xi+Bd\eta+Cd\zeta+\ldots$$

Заменив полный момент $Pdp+Qdq+Rdr+\ldots$ через $\lambda dL+\mu dM+\ldots+Ad\xi+Bd\eta+\ldots$, посмотрим, что нужно для того, чтобы выражение $\lambda dL+\mu dM+\ldots+Ad\xi+Bd\eta+\ldots$ было нулем или отрицательной величиной для возможных перемещений и не могло стать положительным ни для одного из этих перемещений.

Для этого перейдем от всех перемещений, какие можно себе представить, только к возможным перемещениям; количества dL, dM, ... уже не смогут менять знак, хотя и могут стать равными нулю; но дифференциалы $d\xi$, $d\eta$, ... останутся столь же произвольными, как и в случае, если бы мы рассматривали лю-

бые перемещения, которые можно вообразить; и мы сможем располагать этими дифференциалами так, чтобы функции $\lambda dL + \mu dM + \ldots + Ad\xi + Bd\eta + \ldots$ можно было придать желаемый знак; следовательно, полный момент не сможет сохранить один и тот же знак для всех возможных перемещений, если только мы не будем иметь $Ad\xi + Bd\eta + \ldots = 0$ при любых $d\xi$, $d\eta$, ..., что дает в отдельности $A = 0$, $B = 0$. Эти уравнения часто заключают все условия равновесия системы и всегда содержат некоторые из них. Но поскольку, очевидно, они все сводятся к равенству

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \lambda dL + \mu dM + \ldots,$$

которое должно иметь место для всех вообразимых перемещений, то можно рассматривать только это равенство.

Установив, что

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \lambda dL + \mu dM + \ldots$$

для всех вообразимых перемещений, будем вновь рассматривать лишь возможные перемещения. Так как dL, dM, ... не могут менять знаки, но могут обращаться в нуль, то ясно, что величина $\lambda dL + \mu dM + \ldots$ будет отрицательна или равна нулю, если мы придадим множителям λ, μ, ... знаки, соответственно противоположные знакам дифференциалов dL, dM, ...; кроме того, видно, что $\lambda dL + \mu dM + \ldots$ будет оставаться отрицательным лишь в этом предположении; поэтому можно считать, что второе и последнее условие равновесия состоит в том, чтобы знаки λ, μ, ... были соответственно противоположны знакам dL, dM, ... Таким образом, равновесие системы требует, чтобы для всех вообразимых перемещений было соблюдено равенство

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \lambda dL + \mu dM + \ldots$$

и чтобы λ, μ, ... имели знаки, противоположные знакам дифференциалов dL, dM, ..., отнесенных к возможным перемещениям. Перенося все члены в правую часть, получаем, что условия равновесия любой системы выражаются уравнением

$$0 = Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \ldots,$$

которое должно иметь место для всех вообразимых перемещений, и условием, чтобы величины λ, μ, ... имели соответственно те же знаки, что и дифференциалы dL, dM, ... для всех возможных перемещений. Очевидно, что если бы одна или несколько величин dL, dM, ... могли быть только равны нулю для возможных перемещений, то знаки множителей, соответствующих этим величинам, были бы безразличны.

II. Чтобы применить предшествовавшие соображения к некоторым частным примерам, отнесем систему к прямоугольным координатам и обозначим через X, Y, Z силы, параллельные осям, приложенные к некоторой точке системы. Если обозначим через dx, dy, dz проекции на координатные оси некоторого перемещения, то трехчлен $Xdx+Ydy+Zdz$ будет выражать момент, взятый при рассмотрении одной только точки системы, а сумма

$$\sum(Xdx+Ydy+Zdz),$$

распространенная на все точки, даст значение полного момента.

Теперь обозначим через dL, dM, ... линейные функции dx, dy, dz, ..., которые, в силу природы системы, могут изменять знак только при переходе от возможных перемещений к тем, которые не являются возможными; для равновесия будем иметь уравнение

$$0=\sum(Xdx+Ydy+Zdz)+\lambda dL+\mu dM+\ldots,$$

которое должно удовлетворяться для любого вообразимого значения dx, dy, dz и в котором λ, μ, ... имеют соответственно те же знаки, что функции dL, dM, ..., отнесенные к возможным перемещениям.

III. Рассмотрим в качестве первого примера равновесие точки m, находящейся на некоторой поверхности; пусть $L=0$ — уравнение поверхности; координаты точки m должны ему удовлетворять. Подставив их в уравнение и обозначив через dL изменение L, обусловленное каким-либо перемещением точки m, будем иметь для равновесия этой точки

$$0=Xdx+Ydy+Zdz+\lambda dL.$$

Чтобы определить знак dL, а следовательно, знак λ, заметим, что поверхность $L=0$ делит пространство на две части, которые легко различить друг от друга, поскольку для одной L — больше нуля, а для другой — меньше. Предположим, что точка m может перемещаться лишь в том пространстве, где L больше нуля, а также по самой поверхности. Отсюда следует, что для возможных перемещений функция L будет сохранять свое значение или будет возрастать, так что dL опять-таки для возможных перемещений будет или равно нулю или положительно и сможет стать отрицательным лишь для невозможных перемещений; следовательно, и величина λ должна быть положительна.

Обозначая через x, y, z координаты точки m и рассматривая L как функцию x, y, z, будем иметь

$$dL=\frac{dL}{dx}\,dx+\frac{dL}{dy}\,dy+\frac{dL}{dz}\,dz,$$

и, следовательно, уравнение равновесия дает

$$X+\lambda\frac{dL}{dx}=0,$$

$$Y+\lambda\frac{dL}{dy}=0,$$

$$Z+\lambda\frac{dL}{dz}=0,$$

или

$$-\lambda=\frac{X}{\frac{dL}{dx}}=\frac{Y}{\frac{dL}{dy}}=\frac{Z}{\frac{dL}{dz}}=\frac{-\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}}.$$

Мы присвоили последней дроби знак минус, ибо каждая из первых дробей отрицательна, вследствие того что положительно λ. Если бы точка должна была оставаться на поверхности, то три первые функции, а поэтому и четвертая, могли бы иметь любой знак. Действительно, в этом и состоит различие между условиями равновесия точки, находящейся на поверхности, и точки, которая не может с нее сойти.

IV. В качестве второго приложения рассмотрим равновесие системы, известной под именем веревочного многоугольника. Обозначим через n число углов, которые будем отличать друг от друга номерами 1, 2, 3, ..., n, и для угла, имеющего номер i, назовем: координаты — через x_i, y_i, z_i; силы, параллельные осям, — через X_i, Y_i, Z_i; часть веревки, заключенную между двумя соседними углами i и $i+1$, — через r_i. Те же буквы x, y, z, X, Y, Z, r с соответствующими значками будут выражать для всех остальных углов то, что x_i, y_i, z_i X_i, Y_i, Y_i, r_i выражают для угла i.

Установив это, можем выразить полный момент суммой

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i),$$

и в то же время, по причине нерастяжимости веревки, необходимо, чтобы дифференциал dr_i мог принимать положительные значения только для перемещений, которых система никогда не может принять; это справедливо при любом номере i. Поэтому, если мы обозначим через λ_i некоторую отрицательную величину, то условие, относящееся к углу i, даст в общем уравнении равновесия член $\lambda_i dr_i$; всякий другой угол даст такие же члены, и потому все то, что условные уравнения вносят в общую формулу равновесия, можно обозначить через $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i dr_i$ или через $\sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i dr_i$, если положить $\lambda_n = 0$.

Согласно предыдущему, уравнение рассматриваемой нами системы обратится в

$$0 = \sum_{1}^{n+1} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i + \lambda_i dr_i), \qquad \text{(A)}$$

причем величина λ_i должна быть отрицательна при любом номере i.

Так как уравнение (A) должно иметь место, каковы бы ни были дифференциалы dx_1, dy_1, dz_1; dx_2, dy_2, dz_2, ..., то нужно отдельно приравнять нулю коэффициенты при всех этих дифференциалах, что даст при любом i

$$0=X_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dx_i}+\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dx_i},$$

$$0=Y_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dy_i}+\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dy_i},$$

$$0=Z_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dz_i}+\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dz_i}\ [4],$$

при непременном предположении, что $\lambda_0=0$.

Но легко видеть, что

$$\frac{dr_{i-1}}{dx_i}=-\frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}},\quad \frac{dr_{i-1}}{dy_i}=-\frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}},\quad \frac{dr_{i-1}}{dz_i}=-\frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}},$$

а потому предшествующие уравнения обратятся в

$$0=X_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dx_i}-\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}},$$

$$0=Y_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dy_i}-\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}},$$

$$0=Z_i+\lambda_i\frac{dr_i}{dz_i}-\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}},$$

или, если пользоваться обозначением конечных разностей,

$$0=X_i+\Delta\left(\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}}\right),$$

$$0=Y_i+\Delta\left(\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dy_{i-1}}\right),$$

$$0=Z_i+\Delta\left(\lambda_{i-1}\frac{dr_{i-1}}{dz_{i-1}}\right),$$

откуда, суммируя и помня, что $\lambda_0=0$,

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s+1}X_i&=-\lambda_s\frac{dr_s}{dx_s},\\ \sum_{i=1}^{s+1}Y_i&=-\lambda_s\frac{dr_s}{dy_s},\\ \sum_{i=1}^{s+1}Z_i&=-\lambda_s\frac{dr_s}{dz_s}.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(B)}$$

Полагая $s = n$, получаем

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} X_i, \quad 0 = \sum_{i=1}^{n+1} Y_i, \quad 0 = \sum_{i=1}^{n+1} Z_i;$$

если обозначить для краткости

$$\sum_{i=1}^{s+1} X_i = A_s, \quad \sum_{i=1}^{s+1} Y_i = B_s, \quad \sum_{i=1}^{s+1} Z_i = C_s, \quad \sqrt{A_s^2 + B_s^2 + C_s^2} = R_s$$

и принять во внимание, что $-\frac{dr_s}{dx_s}$, $-\frac{dr_s}{dy_s}$, $-\frac{dr_s}{dz_s}$ представляют собой косинусы углов λ_s, μ_s, ν_s, образуемых стороной r_s многоугольника с осями координат, то уравнения (B) сведутся к

$$\lambda_s = \frac{A_s}{\cos\lambda_s} = \frac{B_s}{\cos\mu_s} = \frac{C_s}{\cos\nu_s} = -R_s.$$

Равнодействующей R_s нужно придать знак минус, ибо величина λ_s, а следовательно, и дроби $\frac{A_s}{\cos\lambda_s}$, $\frac{B_s}{\cos\mu_s}$, $\frac{C_s}{\cos\nu_s}$ отрицательны. Знак λ_s и, следовательно, R_s был бы безразличен, если бы многоугольник состоял из жестких стержней, так что уравнения равновесия такого многоугольника были бы

$$\frac{A_s}{\cos\lambda_s} = \frac{B_s}{\cos\mu_s} = \frac{C_s}{\cos\nu_s} = \pm R_s.$$

Таким образом, принцип виртуальных скоростей определенно различает случай жестких стержней от случая гибких веревок.

Если бы точки приложения сил не были закреплены неподвижно, а могли скользить вдоль веревки, то предшествующие условия уже не были бы достаточными для поддержания равновесия; действительно, тогда можно было бы нарушить эту систему, так что некоторые из отрезков r_1, r_2, ... могли бы увеличиться и лишь их сумма $r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}$ не могла бы возрасти ни при каком из возможных перемещений, причем осталось бы только одно условие

$$dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_{n-1} < 0,$$

которому должны удовлетворять возможные перемещения. Отсюда легко заключить, что в смысле решения эта новая задача может быть рассматриваема как частный случай предыдущей и выводится из нее, если положить

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_{n-1}.$$

V. Мы рассмотрим еще равновесие гибкой нити, каждый элемент которой находится под действием данных сил; этот случай, как и предыдущий, заключен в задаче о веревочном многоугольнике и может быть из нее выведен, если предположить, что каждая из сторон многоугольника становится бесконечно малой, а число n — бесконечно большим. Но мы разберем его непосредственно, исходя из бесконечно малых. Заметим сначала, что этот вопрос зависит от рассмотрения двух родов дифференциалов: одни из них, как и все те, с которыми нам приходилось иметь дело до сих пор, относятся к бесконечно малым перемещениям, которые можно себе вообразить для нашей системы, другие относятся к переходу из одной точки нити к бесконечно близкой точке Последние мы будем обозначать буквой d, а дифференциалы первого рода, как в «Аналитической механике», — буквой δ.

Пусть теперь Xdm, Ydm, Zdm — силы, параллельные осям, приложенные к элементу dm нити, который соответствует координатам x, y, z. Если мы будем рассматривать только этот элемент то момент будет равен

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm,$$

сумма же

$$S\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dm,$$

распространенная на все элементы нити, выразит полный момент.

По причине нерастяжимости нити элемент ds ее длины сможет при всяком виртуальном перемещении только уменьшиться или остаться неизменным. Но так как $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то вариация δds, обусловленная каким-либо перемещением, выразится величиной

$$\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds};$$

поэтому для возможных перемещений данная величина может быть равна только нулю или отрицательна. Следовательно, если мы возьмем некоторую отрицательную величину λ, элемент ds даст в уравнении равновесия член

$$\lambda\left(\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}\right);$$

каждый другой элемент нити даст такой же член, а потому мы получим для условия равновесия следующее уравнение:

$$0 = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\left(\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}\right)\right],$$

которое должно иметь место для всех вообразимых перемещений; проводя вычисление, как оно выполнено в «Аналитической механике»,* мы придем к тем же результатам, как и в этом великом труде, с той лишь разницей, что наш анализ дает еще одно условие, а именно, что функция λ необходимо должна быть отрицательной, иначе равновесие не может иметь места, даже если удовлетворены все прочие условия.

Мы молчаливо подразумевали, что нить совершенно свободна; но если бы какие-либо условия должны были выполняться относительно ее концов, нужно было бы изменить в соответствии с этими условиями уравнение равновесия

$$0 = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\left(\frac{dxd\delta x + dyd\delta y + dzd\delta z}{ds}\right)\right].$$

Если, например, эти концы закреплены, то, обозначая через x', y', z' координаты первой точки нити, а через x'', y'', z'' — ее последней точки, мы имели бы для всех виртуальных перемещений

$$\delta x' = 0,\quad \delta y' = 0,\quad \delta z' = 0,\quad \delta x'' = 0,\quad \delta y'' = 0,\quad \delta z'' = 0,$$

а потому к общему уравнению равновесия прибавилась бы функция

$$a'\delta x' + b'\delta y' + c'\delta z' + a''\delta x'' + b''\delta y'' + c''\delta z'',$$

---

* Стр. 137, 138, 139 и 140.

в которой количества a', b', c', a'', b'', c'' произвольны по величине и по знаку; для всех вообразимых перемещений было бы справедливо равенство

$$0 = S\left[(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dm + \lambda\left(\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}\right)\right] + \\ + a'\delta x' + b'\delta y' + c'\delta z' + a''\delta x'' + b''\delta y'' + c''\delta z''.$$

В этом уравнении все дифференциалы, обозначенные через δ, включая и те, которые относятся к границам, совершенно произвольны. Интегрируя по частям, получим предыдущую формулу в виде

$$S\left[\left(Xdm - d\lambda\frac{dx}{ds}\right)\delta x + \left(Ydm - d\lambda\frac{dy}{ds}\right)\delta y + \left(Zdm - d\lambda\frac{dz}{ds}\right)\delta z\right] + \\ + \left(a'' + \lambda''\frac{dx''}{ds''}\right)\delta x'' + \left(b'' + \lambda''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta y'' + \left(c'' + \lambda''\frac{dz''}{ds''}\right)\delta z'' + \\ + \left(a' + \lambda'\frac{dx'}{ds'}\right)\delta x' + \left(b' + \lambda'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta y' + \left(c' + \lambda'\frac{dz'}{ds'}\right)\delta z';$$

величины, отмеченные одним значком, относятся к началу, отмеченные двумя значками — к концу нити. Приравнивая нулю коэффициенты при всех δ — каждый в отдельности, — найдем сначала следующие три уравнения, относящиеся ко всем точкам нити:

$$0 = Xdm - d\lambda\frac{dx}{ds},$$

$$0 = Ydm - d\lambda\frac{dy}{ds},$$

$$0 = Zdm - d\lambda\frac{dz}{ds},$$

а затем получим для концов условия

$$0 = a' + \lambda'\frac{dx'}{ds'}, \quad 0 = b' + \lambda'\frac{dy'}{ds'}, \quad 0 = c' + \lambda'\frac{dz'}{ds'},$$

$$0 = a'' + \lambda''\frac{dx''}{ds''}, \quad 0 = b'' + \lambda''\frac{dy''}{ds''}, \quad 0 = c'' + \lambda''\frac{dz''}{ds''},$$

которым всегда можно удовлетворить при помощи неопределенных величин a', b', c', a'', b'', c''.

Если бы один из концов, например первый, необходимо должен был оставаться на поверхности $L=0$, где L — функция x', y', z', а другой конец был бы свободен, то уравнение равновесия было бы

$$0=S\left[(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm+\lambda\left(\frac{dxd^{\delta}x+dyd^{\delta}y+dzd^{\delta}z}{ds}\right)\right]+\mu\delta L,$$

где μ — количество, не определенное по величине и по знаку. Но если бы точка (x', y', z') была только помещена на поверхности $L=0$, то знак количества μ был бы предопределен (см. параграф III).

VI. В качестве последнего приложения скажем несколько слов о равновесии несжимаемых жидкостей. Обозначая через Xdm, Ydm, Zdm параллельные осям составляющие силы, приложенной к частице dm жидкости, и, как мы уже имели выше, через δx, δy, δz проекции какого-либо перемещения элемента dm по координатным осям, получим в полном моменте член $(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$, зависящий от частицы dm; сумма

$$S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm,$$

распространенная на всю массу жидкости, даст значение полного момента для какого-либо перемещения. Все перемещения, которые можно себе представить в несжимаемой жидкости можно разделить на три класса: 1) перемещения, связанные с уменьшением объема; 2) перемещения, при которых объем не изменяется; 3) перемещения, связанные с увеличением объема Перемещения первого рода невозможны в силу природы системы, и бесполезно ими заниматься. Что же касается двух других, то для равновесия необходимо, чтобы полный момент, относящийся к этим перемещениям, был бы равен нулю или отрицателен.

Если обозначим через $dxdydz$ объем частицы dm, то вариация $\delta(dxdydz)$ этого объема, обусловленная каким-либо перемещением может быть, как известно, выражена как

$$\left(\frac{d^{\delta}x}{dx}+\frac{d^{\delta}y}{dy}+\frac{d^{\delta}z}{dz}\right)dxdydz;$$

для возможных перемещений эта вариация должна быть равна нулю или положительна; поэтому, согласно общей теории, введя положительную величину p, функцию x, y, z, мы будем иметь для всех вообразимых перемещений

$$0 = S\left[\rho(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + p\left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}\right)\right] dxdydz,$$

где ρ — плотность жидкости.

Отсюда для всей массы жидкости следует:

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z,$$

и будем иметь $p = 0$ на всем протяжении ее поверхности. Наш анализ тот же, что и в «Аналитической механике»,* однако там не указывается, что величина p необходимо должна быть положительной; если это условие не выполнено, то жидкость будет перемещаться, не образуя непрерывной массы.

Лагранж не рассматривал перемещений, сопровождаемых увеличением объема, и не исключил их какими-либо условиями; поэтому даже при выполнении всех условий, какие он поставил, жидкость могла бы претерпеть разрыв. Чтобы привести пример такого случая, достаточно рассмотреть жидкость, на каждую частицу которой действует отталкивательная сила, исходящая из неподвижного центра, причем поверхность жидкости не испытывает никакого давления. Предположим, что отталкивательная сила пропорциональна расстоянию; мы будем иметь

$$X = x, \; Y = y, \; Z = z$$

и

$$dp = \rho(xdx + ydy + zdz);$$

полагая плотность постоянной, найдем

$$p = \frac{\rho(x^2 + y^2 + z^2)}{2} + c,$$

* Стр. 194 и следующие

или, поскольку можно написать $x^2+y^2+z^2=r^2$,

$$p=\frac{\rho r^2}{2}+c.$$

Для свободной поверхности имеем $0=\frac{\rho r^2}{2}+c$; итак, эта поверхность сферическая; она имеет центром очаг отталкивательной силы. Обозначив через R ее радиус, будем иметь

$$c=-\frac{\rho R^2}{2}$$

и, следовательно,

$$p=\frac{\rho}{2}(r^2-R^2).$$

Таким образом, на основании предшествующего анализа можно было бы думать, что равновесие может существовать для сферической поверхности; однако, поскольку ничто не препятствует частицам жидкости рассеяться в пространстве, отталкивательная сила необходимо их рассеет. Между тем, согласно проведенному нами анализу, равновесие невозможно, ибо величина

$$p=\frac{\rho}{2}(r^2-R^2)$$

отрицательна.

Но если бы сила была притягательной и сфера — полой, равновесие имело бы место. Действительно, мы нашли бы в этом случае

$$dp=-\rho r dr,$$

откуда

$$p=C-\rho\frac{r^2}{2};$$

для поверхности, наиболее удаленной от центра, имеем

$$0=C-\rho\frac{r^2}{2}$$

и, вычитая,

$$p=\frac{\rho}{2}(R^2-r^2);$$

следовательно, давление положительно. Если обозначить через r_0 радиус поверхности, наиболее близкой к центру, то получается значение давления в каждой точке этой поверхности:

$$\frac{\rho}{2}(R^2 - r_0^2).$$

Итак, шаровой слой, на все частицы которого действовала бы притягательная сила, исходящая из центра слоя, оставался бы в равновесии, а если бы эта сила была отталкивательной, тот же слой рассеялся бы в пространстве. Этот результат никоим образом не должен казаться нам удивительным; ибо системы, равновесие которых мы рассматривали, таковы, что если обратить силы, которые в них взаимно уничтожаются, т. е. придать им направление, обратное тому, какое они имели ранее, то равновесие более не будет иметь места. В первом случае система сил будет эквивалентна другой системе, во втором случае эквивалентности нет. Под системой, эквивалентной другой системе, мы разумеем такую, что если обратить все ее силы, они будут уравновешивать силы другой системы.

VII.* Мы закончим эту статью некоторыми соображениями, относящимися к движению систем.

Если силы P, Q, R, ... (параграф I) не уравновешиваются между собой, то полный момент

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots$$

необходимо станет положительным для некоторых из возможных перемещений; и поэтому уравнение

$$0 = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$

не будет иметь места. Но если обозначить через P', Q', R', ... *динамические* силы системы, а через $P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \ldots$ — момент этих сил, то будем иметь для всех вообразимых перемещений

$$0 = P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \ldots + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \\ + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$

ибо динамические силы всегда уравновешивают силы движущие.

* Параграф VII и следующие добавлены во время печатания.

Согласно Амперу, мы будем называть динамической силой реакцию, которую материя противопоставляет всякому изменению движения, т. е. изменению как величины скорости, так и ее направления. Если система находится в покое или в прямолинейном и равномерном движении, то ее динамические силы, очевидно, равны нулю; они не будут равны нулю, если движение изменяется; но они всегда способны уничтожить движущие силы.

Обозначим через m, m', m'', ... массы, из которых состоит рассматриваемая нами система, и пусть x, y, z будут прямоугольные координаты массы m, а x', y', z' — координаты массы m' и т. д.; все эти координаты относятся к одним и тем же осям. Если, далее, мы обозначим через t время, истекшее с некоторого определенного момента, а характеристикой d — разности, относимые к dt, то выражение для момента динамической силы точки массы m будет

$$-\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m,$$

а сумма

$$-\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m,$$

распространенная на все массы m, m', m'', ..., представит полный момент динамических сил, так что

$$P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \ldots = -\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m;$$

поэтому формула

$$0 = P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \ldots + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \\ + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$

обращается в

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$

Это — уравнение Лагранжа, с той разницей, что в «Аналитической механике» количества λ, μ, ... неизвестны ни по величине, ни по знаку. Это происходит оттого, что Лагранж рассматривает

только такие системы, возможные перемещения которых удовлетворяют уравнениям; между тем в состоянии движения, как и равновесия, может случиться, что перемещения, о которых мы говорим, не связаны уравнениями [5]; тогда знаки величин λ, $\mu, \ldots$ известны наперед, ибо они должны быть соответственно те же, что и знаки функций δL, $\delta M, \ldots$, отнесенных к возможным перемещениям.

Формула

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots,$$

если в ней по отдельности приравнять нулю коэффициенты при δx, δy, δz, $\delta x', \ldots$, даст для определения неизвестных x, y, z, $x', \ldots$, λ, $\mu, \ldots$ столько же уравнений, сколько имеется координат x, y, z, $x', \ldots$, и если прибавить к этим уравнениям уравнения $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$, число которых равно числу величин λ, $\mu, \ldots$, то мы получим, в общем, столько же уравнений, сколько и неизвестных, и определение этих неизвестных будет задачей интегрального исчисления. Мы обозначаем через dL, $dM, \ldots$ то, во что обращаются соответственно δL, $\delta M, \ldots$, когда мы полагаем в них $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz$, $\delta x' = dx' \ldots$

VIII. Здесь, однако, надо сделать существенное замечание, а именно: так как большая часть возможных, или виртуальных, перемещений не обращает функции δL, $\delta M, \ldots$ в нуль, то могло бы случиться, что с известного момента действительные перемещения dx, $dy, \ldots$ также не удовлетворяли бы некоторым из уравнений $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$ Это объясняется тем, что dx, $dy, \ldots$ содержатся среди тех значений δx, $\delta y, \ldots$, которые они могут принимать, не переставая принадлежать к возможным перемещениям, а потому легко понять, что разности dx, $dy, \ldots$ вполне могут стать соответственно равными тем из вариаций δx, $\delta y, \ldots$, которые не дают $\delta L = 0$, $\delta M = 0, \ldots$; тогда, очевидно, число уравнений, служащих для определения движения, становится меньше, чем число неизвестных. Это обстоятельство нужно иметь в виду всегда, когда мы рассматриваем движение системы, возможные

перемещения которой не могут быть связаны между собой равенствами, и весьма важно добавить к методам «Аналитической механики» соображения, приводящие к установлению всех уравнений, необходимых для определения движения такой системы.

Для этой цели рассмотрим все уравнения

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$
$$dL = 0,\ dM = 0, \ldots$$

как если бы мы были уверены, что функции dL, $dM, \ldots$ будут каждая равна нулю в продолжение всего движения, и постараемся решить эти уравнения методами интегрального исчисления. Определив из них величины λ, $\mu, \ldots$, обратим внимание на знаки этих величин; если их знаки для всех значений t будут соответственно те же, что и у функций δL, $\delta M, \ldots$, относящихся к возможным перемещениям, то можно быть уверенным, что действительные перемещения во все время движения удовлетворяют уравнениям $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$ и что найденное решение вопроса точно и исчерпывающе. Но иное дело, если, начиная с момента $t = \tau$, один или несколько из множителей λ, $\mu, \ldots$ получают знаки, обратные тем, какие они должны иметь для равновесия движущих и динамических сил. Эти силы не будут уже взаимно уничтожаться, и отсюда следует заключить, что с момента $t = \tau$ предполагаемое нами движение, обусловливающее динамические силы, не может иметь места, ибо динамические силы всегда должны уничтожать соответствующие им движущие силы.

Отсюда вытекает, что некоторые из уравнений $dL = 0$, $dM = 0, \ldots$ не будут удовлетворяться. Это будут уравнения, которым соответствуют множители λ, $\mu, \ldots$, изменяющие свой знак. Мы опустим эти уравнения, но в то же время опустим в формуле

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$

(и тем самым во всех тех, которые из нее вытекают) все члены, содержащие те же множители, т. е. множители, в которых имела

место перемена знака. Таким образом, мы найдем для определения движения, начиная с момента τ, столько же уравнений, сколько и неизвестных, ибо, согласно предыдущему, каждое уравнение $dL=0$, $dM=0, \ldots$, исключаясь, как бы уносит с собой одну из неизвестных, входящих в задачу.

Можно видеть, что мы будем иметь для всех значений t:

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$
$$\lambda dL = 0, \ \mu dM = 0, \ldots,$$

так что число уравнений будет всегда то же, что и число неизвестных; но уравнения будут изменяться для различных моментов, ибо для некоторого промежутка времени придется положить, например, $dL=0$, а для другого промежутка $\lambda=0$; впрочем, можно видеть, что λ станет равным нулю, когда dL перестанет быть нулем.

Чтобы пояснить сказанное примером, предположим, что после интегрирования уравнений

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots,$$
$$\lambda dL = 0, \ \mu dM = 0, \ldots$$

и исследования значений λ, $\mu, \ldots$ оказывается, что все эти множители от начала движения до $t=\tau$ имеют те знаки, каких требует равновесие между движущими и динамическими силами, но что в момент $t=\tau$ множитель λ обращается в нуль, а затем этот же множитель меняет знак. Движение от $t=0$ до $t=\tau$ будет определено уравнениями

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots$$
$$dL = 0, \ dM = 0, \ldots$$

и будет также определено уравнениями

$$\sum \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2} m = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \mu dM + \ldots,$$
$$dM = 0, \ldots,$$

начиная с $t=\tau$.

Мы видим, что уравнения движения могут изменяться в разные моменты; но это относится не ко всем уравнениям: есть такие, которые остаются неизменными во все время движения, например то, которое известно под названием начала живых сил; оно получается путем замены в общей формуле динамики обозначения δ через d. Эта замена, принимая во внимание условия $\lambda dL = 0$, $\mu dM = 0, \ldots$, которые имеют место во все время движения, приводит к уравнению

$$d\sum\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}m = 2(Pdp+Qdq+Rdr+\ldots),$$

которое будет удовлетворяться при всяком t. То же будет относиться ко всем уравнениям, которые, как и предыдущее, независимы от возможных перемещений системы; так, во всех случаях, когда могут иметь место закоп площадей и закон центра тяжести, уравнения, их выражающие, будут существовать во все время движения.

IX. Чтобы дать представление о приложениях изложенной теории, рассмотрим движение тяжелой точки, помещенной на вертикальном круге. Если возьмем оси координат x и y в плоскости круга и направим первую горизонтально, а вторую вертикально снизу вверх, причем начало координат расположено в центре круга, то уравнение движения будет

$$\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y}{dt^2} = -g\delta y + \lambda(x\delta x + y\delta y),\ \lambda(xdx+ydy) = 0.$$

λ никогда не может стать отрицательным, ибо для возможных перемещений функция x^2+y^2 может только оставаться без изменений или возрастать. Предположим сначала, что $xdx+ydy=0$. Полагая $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, получим

$$d\,\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}+2gdy=0,$$

откуда, интегрируя и полагая, что движение начинается от состояния покоя,

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = 2g(y_0-y),$$

где y_0 — ордината начального положения точки. Полагая $\delta x = x$, $\delta y = y$ и обозначая через r радиус круга, получим

$$\frac{xd^2x + yd^2y}{dt^2} + gy = \lambda r^2;$$

но

$$d(xdx + ydy) = xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = 0,$$

поэтому

$$\lambda r^2 = gy - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = g(3y - 2y_0).$$

Из этого значения λ следует, что движение в круге не могло бы осуществляться ни на один момент, если y_0 не положительно. Поэтому предположим $y_0 > 0$; легко видеть, что y будет уменьшаться с убыванием времени, ибо если положим $y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, то из уравнения

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2g(y - y_0)$$

найдем, что

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{r}(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

где θ_0 — начальное значение θ, откуда

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta};$$

сначала необходимо, чтобы было $\theta_0 < \theta$, т. е. θ должно возрастать в начале движения; затем θ не может начать уменьшаться, прежде чем $\frac{d\theta}{dt}$ не обратится в 0; поэтому θ не будет уменьшаться, не обратившись в $2\pi - \theta_0$. Итак, мы должны положить

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

от $\theta = \theta_0$ до $\theta = 2\pi - \theta_0$; поэтому y непременно будет убывать; действительно, $\frac{dy}{dt} = -r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$ и может обратиться в нуль и

даже стать отрицательным; но как только y станет равным $\frac{2y_0}{3}$, величина λ станет равной 0, а позднее примет отрицательное значение. Поэтому точка будет двигаться в круге лишь до $y=\frac{2y_0}{3}$, а затем сойдет с круга, так что, начиная с $y=\frac{2y_0}{3}$, ее движение будет задано уравнением

$$\frac{d^2x\delta x+d^2y\delta y}{dt^2}+gdy=0,$$

которое может быть разложено на два:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+g=0.$$

Можно считать, что скорость $\sqrt{\frac{2gy_0}{3}}$ и координаты y_0, $\sqrt{r^2-y_0^2}$ относятся к начальному состоянию движения, которое будет иметь место, начиная с $y=\frac{2y_0}{3}$. Мы не будем входить в другие подробности этого частного примера, который мы выбрали из-за его большой простоты.

X. Во всем предыдущем мы молчаливо подразумевали, что коэффициенты при δx, δy, δz, $\delta x'$, ... в функциях δL, δM, ... не содержат явным образом времени t. Но если бы эта переменная в них заключалась, то предшествующих соображений было бы недостаточно, чтобы установить все уравнения движения, ибо действительные перемещения не содержались бы среди тех возможных перемещений, которые удовлетворяют уравнениям $\delta L=0$, $\delta M=0$, ...; мы поэтому не имели бы $dL=0$, $dM=0$, ... и, следовательно, не имели бы для всех моментов $\lambda dL=0$, $\mu dM=0$, ...

Если мы допустим, что время t входит явным образом в коэффициенты функций δL, δM, ..., то сами эти функции будут как бы подвижными, и тогда можно рассматривать величины dx, dy, dz, dx', ... как состоящие каждая из двух частей: одна зависела бы от перемещений функций δL, δM, ..., а другая отвечала бы

движениям m, m', ... относительно этих функций. Положим, таким образом, $dx = \Delta x + Dx$, $dy = \Delta y + Dy$, $dz = \Delta z + Dz$, $dx^1 = \Delta x + Dx'$, ..., где Δx, Δy, Δz, $\Delta x'$, ... относятся к перемещениям функций δL, δM, ..., а Dx, Dy, Dz, Dx', ... — к движениям точек m, m', ... по отношению к этим функциям. Будем иметь сначала

$$DL = 0, \quad DM = 0, \ldots;$$

DL, DM, ... представляют собой то, во что обращаются δL, δM, ..., если в них положить: $\delta x = Dx$, $\delta y = Dy$, ... т. е. если имеем, например,

$$\delta L = A\delta x + B\delta y + C\delta z + A'\delta x' + \ldots,$$

то будем иметь

$$DL = Adx + Bdy + Cdz + A'Dx' + \ldots$$

Подставляя вместо Dx, Dy, Dz, Dx', ... их значения $dx - \Delta x$, $dy - \Delta y$, $dz - \Delta z$, $dx' - \Delta x'$, ..., получим

$$dL = \Delta L, \quad dM = \Delta M, \ldots$$

Но величины ΔL, ΔM, ... должны быть заданы; обозначив их соответственно через Tdt, $T'dt$, ..., будем иметь

$$dL = Tdt, \; dM = T'dt, \ldots$$

Это — уравнения, которые заменяют в рассматриваемом нами случае формулы $dL = 0$, $dM = 0$, ..., относящиеся к предположению, что δL, δM, ... не зависят от времени t. Величинами $dL = Tdt$, $dM = T'dt$, ... мы воспользуемся так же, как $dL = 0$, $dM = 0$, ... Может также случиться, что, начиная с некоторого момента, который определяется как и ранее, уравнения $dL = Tdt$, $dM = T'dt$ не будут удовлетворяться, но уравнения $\lambda(dL - Tdt) = 0$, $\mu(dM - T'dt) = 0$... будут удовлетворяться в продолжение всего движения, и, комбинируя их с общей формулой динамики, мы всегда получим столько уравнений, сколько их необходимо, чтобы движение было вполне определено.

Мы имеем в виду опубликовать курс учения о равновесии и движении, где мы подробно изложим все то, на что лишь указали в этой статье. В этом курсе будет показано, что расширение Лагранжем принципа Ивана Бернулли, расширение, которое казалось неясным или неправильным самым знаменитым математикам нашего времени, на самом деле вполне закономерно и вытекает из самого существа вопроса. Там будет также показано, что все задачи, которые можно поставить относительно равновесия или движения систем, легко разрешаются с помощью принципа виртуальных скоростей; но главным образом мы разовьем там условия устойчивости равновесия, вопрос, который, мне кажется, не разбирался еще в той общности и широте, каких можно пожелать.

О МГНОВЕННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ СИСТЕМ, ПОДЧИНЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ УСЛОВИЯМ

I. Со времени опубликования «Аналитической механики» многие математики занимались установлением уравнений движения системы тел, подчиненной каким-либо связям; но во всех работах, с которыми мне пришлось ознакомиться, авторы только начинали или просто воспроизводили более или менее удачно теорию Лагранжа. * Мне кажется, я первый, кто добавил хоть немного к этой теории в статье о моменте сил, опубликованной три года назад [1].

Занимаясь в прошлом году подготовкой к печати курса механики, ** я имел случай вновь продумать выводы общих уравнений динамики; я пришел к заключению, что известный в настоящее время метод для составления этих уравнений в случае системы, подчиненной связям, изменяющимся в зависимости от времени, оставляет желать многого в смысле ясности и точности; можно даже усомниться в правильности результатов, к которым он приводит. Действительно, этот метод состоит в установлении условий равновесия *потерянных сил*; однако, чтобы уравновесить друг друга, любые силы должны стремиться произвести лишь невозможные движения, т. е. движения, которых система получить не может. Примем, что возможные перемещения или движения —

---

* Я говорю лишь о доказательстве уравнений динамики, но отнюдь не об их интегрировании. В этом последнем отношении наука значительно ушла вперед со времени Лагранжа.

** Этот курс, составленный на французском языке, только что литографирован, как и его русский перевод.

это такие, которые удовлетворяют некоторому числу условий, как-то:

$$adx + bdy + cdz + a'dx' + b'dy' + c'dz' + a''dx'' + \ldots + Tdt > 0. \quad \text{(a)}$$

Здесь dx, dy, dz обозначают проекции на оси координат перемещения некоторой точки системы, dx', dy', dz' — проекции перемещения другой точки системы и т. д.; a, b, c, a', b', c', a'', ..., T — конечные величиины, зависящие от положения системы по прошествии времени t; dt — элемент времени. Итак, чтобы находиться в равновесии, потерянные силы не должны вызывать перемещений, удовлетворяющих условиям (a). Но чтобы привести их в равновесие, исходят не из этого; в неравенствах [a] опускают члены, содержащие dt, и предполагают, что потерянные силы неспособны произвести перемещения, удовлетворяющие условиям вида

$$adx + bdy + cdz + a'dx + b'dy + c'dz + \ldots > 0. \quad \text{(b)}$$

Между тем перемещение вполне может не удовлетворять условиям возможных перемещений [2]; стало быть, при таком подходе к вопросу, мы, по-видимому, не имеем выражения того, что потерянные силы отнюдь не стремятся вызвать какое-либо возможное перемещение, и, следовательно, не вполне ясно, что условия, установленные таким образом, являются условиями равновесия этих сил. А если нам ответят, что нужно уравновесить потерянные силы в начале момента dt и потому взять условия возможных перемещений при $dt = 0$, то вопрос от этого не станет более ясным; ибо в течение промежутка $t = 0$ не может произойти никакого перемещения, а если только время идет, то становятся возможными перемещения, отличные от (b), и можно полагать, что потерянные силы дадут системе одно из этих перемещений, как только оно станет возможным.

II. Впрочем, я, конечно, не утверждаю, что известные уравнения для движения системы при переменных условиях неверны; я только полагаю, как уже сказал выше, что они установлены не вполне ясно. В дальнейшем я займусь тем, что выведу их при

помощи рассуждений, свободных от всяческих возражений, и в то же время придам им всю ту общность, которая им присуща.

Прежде чем говорить о системе, скажем несколько слов об одной материальной точке, чтобы представить *принцип ускоряющих сил* в форме, которая облегчает и сокращает его приложения и которая будет нам полезна для придания общей теории динамики наибольшей простоты, а также для возможно краткого ее изложения.

Обозначим через m массу материальной точки, находящейся под действием движущей силы P, через v — скорость этой точки по прошествии времени t, через α и ω — углы, которые P и v составляют с некоторым заданным направлением (A). В момент dt, следующий за временем t, подвижная точка опишет параллельно направлению (A) линию, которую можно представить выражениями

$$v \cos \omega \, dt + \frac{P}{m} \cos \alpha \frac{dt^2}{2} \quad \text{и} \quad v \cos \omega \, dt + \frac{d(v \cos \omega)}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$P \cos \alpha = m \frac{d(v \cos \omega)}{dt}. \tag{c}$$

Эта формула заключает *начало ускоряющих сил*. Ее следует предпочесть трем уравнениям, посредством которых обычно представляется это начало и которые вытекают из (с), если за направление (A) берутся последовательно направления осей прямоугольных координат.

Уравнение (*с*) дает — при подходящем выборе направлений (A) — наиболее простые формулы для определения движения [точки] m. Положим, например, что сила P направлена к неподвижному центру. В этом случае описанная [точкой] кривая будет, очевидно, плоская, и поэтому для получения уравнений движения будет достаточно отнести уравнение (с) к двум направлениям, параллельным плоскости движения. Но следует выбрать эти направления так, чтобы получить уравнения наиболее легко интегрируемые; для этого нужно только, чтобы одно из направлений

совпадало с направлением касательной к траектории, а другое — с перпендикуляром к направлению силы P; тогда получим

$$mvdv = Pdr,$$

$$d\left(\frac{r^2dp}{dt}\right) = O,$$

где r и p обозначают полярные координаты, началом которых служит неподвижный центр, к которому тяготеет сила P.

Нет необходимости, чтобы направление (A) было постоянным; оно может меняться с течением времени. Но его следует считать постоянным при дифференцировании величины $v \cos \omega$. Мы хотим сказать, что нужно взять за $\omega + d\omega$ угол, который составляет касательная к траектории в конце [промежутка времени] $t + dt$ с направлением (A), соответствующим моменту времени t. Именно так было сделано для получения уравнений, относящихся к только что приведенному примеру, где были применены проекции на переменные направления.

III. Полезно дать уравнению (c) истолкование, которое основано на соображениях, отличных от тех, какие послужили для его вывода.

Положим, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt движущая сила P заставляет точку m описать вместо линии AB, которую она описала бы вследствие своей инерции, линию AC. Бесконечно малый отрезок второго порядка BC представит то, что называется действием силы P, а сама эта сила будет иметь величину $\frac{2mBC}{dt^2}$ [3] и направление BC; она вся уйдет на то, чтобы произвести движение BC в добавление к движению AB, которое имело бы место при отсутствии воздействия силы P.

Однако трудно себе представить, каким образом сила может себя исчерпать, произведя движение, если не допустить, что материя оказывает сопротивление или реакцию всякому изменению своего состояния.* Итак, сила P уходит на преодоление

* О движущемся объекте, который остается в покое или движется равномерно и прямолинейно, говорят, что он сохраняет свое состояние;

сопротивления, которое оказывает движущаяся точка m изменению своего состояния, т. е. переходу движения AB в движение AC. Сопротивление, о котором мы говорим, оказало бы свой эффект, если бы не было силы P. Ибо, допуская, что на m ничто не действует, можно предположить, что причиной, препятствующей этой точке двигаться по AC, является сила, которая создает эффект CB от C к B. Ее называют силой инерции. Ясно что каждому изменению движения отвечает особая сила инерции. В рассматриваемом нами случае эта сила имеет величину $\frac{2mCB}{dt^2}$ и направление CB. Таким образом, она равна и противоположна движущей силе P.

Действия движущих сил и сил инерции одинаковы по природе, но противоположны по своей направленности. Движущие силы стремятся нарушить естественное состояние движущегося объекта, а силы инерции стремятся изменить его нарушенное движение, чтобы превратить его в естественное движение; поэтому как движущая сила P переводит естественное движение AB в движение AC, так и сила инерции превратила бы измененное движение AC в естественное движение AB, если бы ничто этому не препятствовало. Масса m под действием силы P совершает движение по AC, поскольку ничто не нарушает этого движения: ни движущая сила, ни сила инерции, ибо эти две силы взаимно уничтожаются.

Уравнение (с) является лишь выражением равенства по величине и противоположности по направлению движущей силы и силы инерции. Ибо легко видеть, что $-m\frac{d(v\cos\omega)}{dt}$ выражает проекцию силы инерции на направление, составляющее угол ω с касательной к траектории.

наоборот, если скорость или направление движения, или то и другое сразу, изменяются, то говорят, что состояние движущегося объекта изменяется. Чтобы сообразоваться с этим способом выражения, мы будем разуметь под состоянием движущегося объекта скорость и направление его движения.

Но если бы мысленно мы приписали движущемуся объекту движение AD, отличное от AB и AC, то это движение превратилось бы в AC под действием силы $\frac{2mDC}{dt^2}$, направленной по DC и представляющей собой равнодействующую силы инерции $\frac{2mDB}{dt^2}$, которая направлена по DB, и движущей силы $\frac{2mDE}{dt^2}=\frac{2mBC}{dt^2}=P$. Итак, если нарушенное движение переходит в другое нарушенное движение, то причина этого — равнодействующая силы инерции, вызывающей первое из этих движений, и движущей силы, действующей на m. Таким образом, объекту m можно сообщить любое движение, если только прибавить к этому движению эффект равнодействующей движущей силы и силы инерции, относящейся к предполагаемому движению точки m.

Если движению точки m препятствуют какие-либо преграды, так что она не может повиноваться действию движущей силы, т. е. не может двигаться по тому пути, по которому двигалась бы, если бы была свободна, то движущая сила и фактическая сила инерции уже не будут взаимно уничтожаться; но их равнодействующая будет стремиться произвести только невозможные перемещения, т. е. будет только оказывать давление на препятствия, стесняющие движение массы m. Можно добавить, что, не будучи равна нулю, эта равнодействующая будет к нему сколь угодно близка. Это положение легко доказать, и доказательство было даже дано знаменитым математиком Гауссом, притом в общем виде, а именно для любой системы материальных точек.

IV. Теперь мы займемся основным предметом этого труда. Обозначим через m, m', m'', m''', ... массы материальных точек, составляющих систему, которую мы будем рассматривать и которую для краткости назовем (s), а через P, P', P'', P''', ... — ускоряющие силы, соответственно приложенные к массам m, m', m'', m''', ...

Самым общим вопросом, какой можно себе поставить относительно движения системы (s), является вопрос об определении ее положения для любого времени t в предположении известности

ее положения и состояния для некоторого заданного момента, от которого можно отсчитывать время t. Под положением и состоянием системы мы подразумеваем положение и состояние каждой материальной точки, входящей в систему.

В этой работе мы не имеем в виду рассматривать поставленный вопрос во всей его полноте. Мы ставим себе целью разрешить лишь одну его часть, а именно: определить, исходя из положения и состояния системы в некоторый момент t, ее положение и состояние в следующий момент $t+dt$. Эта часть общего вопроса заключает в себе всю механику, ибо она обнимает составление уравнений движения системы, рассматриваемого в самом общем виде. Другая часть вопроса имеет целью решение этих уравнений; она относится уже к общему анализу.

Определение положения и состояния системы (s) для момента $t+dt$ по ее положению и состоянию в момент t дает непосредственно лишь мгновенное перемещение или движение системы (s), но заключает в себе все необходимое для нахождения движения этой системы в течение любого конечного времени. Действительно, если мы можем определить движение системы (s) за промежуток dt, отнесенный к концу некоторого промежутка времени t, нам нужно только заставить совпасть конец t с моментом, для которого нам известны положение и состояние (s), и мы получим положение и состояние, которые она примет в более поздний момент; затем, заставив совпасть конец t с этим новым моментом, получим положение и состояние системы для следующего момента; заставив совпасть конец t с этим последним моментом, будем иметь положение и состояние (s) для следующего момента и т. д. Так как ничто не препятствует продолжать сколько угодно определение положения и состояния (s) от одного момента к другому, то отсюда вытекает возможность найти движение этой системы в течение любого конечного времени. Но бесконечное число операций, какого требует подобное исследование, говорит нам о том, что вопрос относится к области трансцендентного анализа. Поэтому хотя определение мгновенных перемещений включает определение движения в течение любого конечного времени,

однако трудно вывести последний вопрос за пределы первого.

V. Теперь мы будем говорить лишь об одном мгновенном перемещении системы (s). Посмотрим прежде всего, что необходимо знать для его определения. Во-первых, очевидно, что массы m, m', m'', m''', ... и силы P, P', P'', P''', ... должны быть заданы для любого времени t. Они не должны быть непременно функциями только t; они могут зависеть от времени, положения и состояния системы, но необходимо знать, каким именно образом они от них зависят; и этого знания достаточно, чтобы получить их значение от одного момента к другому, исходя из начального момента, для которого положение и состояние системы заданы.

Чтобы найти, что необходимо еще для определения мгновенного перемещения системы (s), кроме масс и ускоряющих сил, представим себе все бесконечно малые перемещения, которые была бы способна принять одна из масс системы, например m, если бы ничто не стесняло ее движения; концы маленьких отрезков, которые изображали бы эти перемещения, могли бы заполнить целиком бесконечно малый объем вокруг массы m. То же относится и ко всем материальным точкам m, m', m'', m''', ... Перемещения масс m, m', m'', m''', ..., комбинируясь между собой, составили бы все перемещения, которые можно было бы мысленно приписать системе (s). Но фактически она не может принять их все по причине связей, которым подвержена система. Для определения мгновенного движения системы нужно знать все перемещения, которые система может действительно принять в течение промежутка dt. Такие перемещения называются *виртуальными*, или *возможными*. В необходимости знать их можно убедиться весьма простым рассуждением; действительно, если бы мы их не знали, мы в то же время не могли бы учесть и тех перемещений, которых система принять не может; мы могли бы приписать ей перемещение, которое оказывается невозможным вследствие наличия препятствий, и ничто не указало бы нам на совершенную нами ошибку.

VI. Механика различает те или иные системы только по массам и возможным перемещениям материальных точек, из которых составлены системы. Таким образом, природа системы (s) вполне задана для каждого момента dt, если известны массы m, m', m'', m''', ... и перемещения, которые они могут принимать в продолжение момента dt. Итак, зная в начале момента dt массы m, m', m'', m''', ..., виртуальные перемещения, ускоряющие силы P, P', P'', P''', ..., положение и состояние системы (s), мы имеем все, что нужно для определения мгновенного перемещения (s).

Массы m, m', m'', m''', ... могут быть заданы непосредственно или посредством уравнений, из которых они определяются; ускоряющие силы P, P', P'', P''', ... чаще всего бывают заданы непосредственно; они зависят обычно от положения и состояния системы. Достаточно знать, каким образом они от них зависят. Что касается положения и состояния системы в начале промежутка dt, то они известны только в том случае, когда начало dt совпадает с первым моментом движения. Поэтому, в сущности говоря, задача состоит не в том, чтобы полностью определить мгновенное перемещение (s), а в том, чтобы найти, как именно это перемещение зависит от положения и состояния системы в начале dt.

Нам остается сказать о возможных перемещениях. Эти перемещения определяются обычно природой системы (s) и препятствиями, стесняющими движение масс m, m', m'', m''', ... Заменяя упомянутые данные их алгебраическими выражениями, приходим к линейным уравнениям или неравенствам между проекциями возможных перемещений на заданные направления и элементом времени dt. Пусть

$$ads\cos\theta + a'ds'\cos\theta' + a''ds''\cos\theta'' + a''\,ds'''\cos\theta''' + \ldots + Tdt > 0$$

представляет одно из таких условий, причем знак $>$ отнюдь не исключает знака равенства; ds, ds', ds'', ds''', ... означают соответственно перемещения масс m, m', m'', m''', ...; θ, θ', θ'', θ''', ... представляют углы, которые ds, ds', ds'', ds''' ... образуют с дан-

ными направлениями (A), (A'), (A''), (A'''), ..., постоянными или переменными, а коэффициенты a, a', a'', a''', ... заданы или зависят определенным образом от положения системы в начале промежутка dt. Они могут зависеть только от положения системы, но в них не должны входить скорости масс m, m', m'', m''', ...

Как найти условие для *возможных перемещений*, нельзя указать никаких общих правил. Их число, коэффициенты a, a', a'', a''', ..., T, направления (A), (A'), (A''), (A'''), ... находятся в каждом отдельном случае при помощи весьма простых геометрических соображений. Но в то же время каждый отдельный случай требует особых приемов; так обстоит дело везде, где нужно не решать уравнения, а составлять их в соответствии с природой задачи.

Для большей общности мы не будем устанавливать числа условий для возможных перемещений; можно написать сколько угодно неравенств вида

$$\left.\begin{aligned}
&a\,ds\cos\theta + a'ds'\cos\theta' + a''ds''\cos\theta'' + a'''ds'''\cos\theta''' + \ldots + T\,dt > 0,\\
&\quad a_1ds\cos\theta_1 + a_1'ds'\cos\theta_1' + a_1''ds''\cos\theta_1'' +\\
&\quad\quad + a_1'''ds'''\cos\theta_1''' + \ldots + T_1dt > 0,\\
&\quad a_2ds\cos\theta_2 + a_2'ds'\cos\theta_2' + a_2''ds''\cos\theta_2'' +\\
&\quad\quad + a_2'''ds'''\cos\theta_2''' + \ldots + T_2dt > 0,\\
&\quad a_3ds\cos\theta_3 + a_3'ds'\cos\theta_3' + a_3''ds''\cos\theta_3'' +\\
&\quad\quad + a_3'''ds'''\cos\theta_3''' + \ldots + T_3dt > 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

причем ни одно из них не исключает равенства; будем рассматривать как возможные только те из перемещений ds, ds', ds'', ds''', ..., которые удовлетворяют всем этим условиям. Буквы θ_1, θ_1', θ_1'', θ_1''', ... обозначают углы, которые ds, ds', ds'', ds''', ... составляют соответственно с постоянными или переменными направлениями (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ..., причем некоторые из

них могут быть те же, что и направления (A), (A'), (A''), (A'''), ...; θ_2, θ'_2, θ''_2, θ'''_2, ... обозначают углы, которые перемещения ds, ds', ds'', ds''', ... составляют соответственно с третьей системой данных направлений (A_2), (A'_2), (A''_2); (A'''_2), ... и т. д.

Может случиться, что среди условий (1) встретятся такие, которые заданы равенствами вместо неравенств. Такие частные случаи всегда вносят некоторые упрощения в определение мгновенных перемещений системы (s), особенно если неравенства (1) заменяются равенствами.

Может случиться также, в зависимости от природы системы или внешних препятствий, что в условиях окажутся некоторые неравенства вида

$$ads\cos\theta + a'ds'\cos\theta' + a''ds''\cos\theta'' + a'''ds'''\cos\theta''' + \ldots + Tdt < 0;$$

в этом случае можно изменить знаки членов в левой части, чтобы иметь

$$-ads\cos\theta - a'ds'\cos\theta' - a''ds''\cos\theta'' - a'''ds'''\cos\theta''' - \ldots - Tdt > 0.$$

Впрочем, в этом изменении нет абсолютной необходимости; можно было бы допустить также, чтобы среди членов левой части условий (1) одни были >0, другие <0. Мы предположили, что все они >0 лишь для большего однообразия; этого, как мы видели, легко и достигнуть.

Наконец, заметим, что всегда можно сделать так, чтобы все a были положительными. Для этого нужно только отнести те члены условий (1), у которых коэффициенты отрицательны, к направлениям, противоположным тем, какие приняты в (1). Так, если бы например, в члене $ads\cos\theta$, который отнесен к направлению (A), коэффициент a был отрицательным, то, относя $ads\cos\theta$ к направлению, противоположному (A) и, следовательно, вполне определенному, мы заменим этот член через $-ads\cos(\pi-\theta)$ или $-ads\cos\theta$, где θ означает угол, составленный ds с направлением, противоположным направлению (A). Мы будем предполагать в дальнейшем направление (A) взятым так, чтобы все a были положительными.

VII. Положим для сокращения

$$\left.\begin{aligned}
&a\,ds\cos\theta + a'ds'\cos\theta' + a''ds''\cos\theta'' + \\
&\quad + a'''ds'''\cos\theta''' + \ldots + T\,dt = U\,dt,\\
&a_1 ds\cos\theta_1 + a_1' ds'\cos\theta_1' + a_1'' ds''\cos\theta_1'' + \\
&\quad + a_1''' ds'''\cos\theta_1''' + \ldots + T_1 dt = U_1 dt,\\
&a_2 ds\cos\theta_2 + a_2' ds'\cos\theta_2' + a_2'' ds''\cos\theta_2'' + \\
&\quad + a_2''' ds'''\cos\theta_2''' + \ldots + T_2 dt = U_2 dt,\\
&a_3 ds\cos\theta_3 + a_3' ds'\cos\theta_3' + a_3'' ds''\cos\theta_3'' + \\
&\quad + a_3''' ds'''\cos\theta_3''' + \ldots + T_3 dt = U_3 dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

тогда условия (1) обратятся в

$$\left.\begin{aligned}
&U\,dt > 0, \quad U_1 dt > 0,\\
&U_2 dt > 0, \quad U_3 dt > 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Важно заметить относительно этих условий, что они точны лишь до величин порядка dt^2. Однако часто бывает, что приходится доводить приближение до dt^3. Этого можно достичь очень легко, прибавляя к каждому первому члену неравенств (3) половину его дифференциала, что даст для условий возможных перемещений неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&U\,dt + \frac{dU}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0,\\
&U_1 dt + \frac{dU_1}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0,\\
&U_2 dt + \frac{dU_2}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0,\\
&U_3 dt + \frac{dU_3}{dt}\frac{dt^2}{2} > 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

которые точны до dt^3 и в которых производные $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$, ... взяты с учетом изменения всего того, что изменяется вместе с t.

Полезно указать одну особую форму, которую можно придать производным $\frac{dU}{dt}$, $\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$, ... и которая пригодится нам позднее. Будем рассматривать только $\frac{dU}{dt}$; то, что мы скажем о ней, будет относиться слово в слово ко всем другим производным. Дифференцируя обычным образом, находим

$$\frac{dU}{dt}=\frac{ad\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}+\frac{a'd\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}+\frac{a''d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}+$$

$$+\frac{a'''d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}+\ldots+\frac{da}{dt}\frac{ds}{dt}\cos\theta+\frac{da'}{dt}\frac{ds'}{dt}\cos\theta'+$$

$$+\frac{da''}{dt}\frac{ds''}{dt}\cos\theta''+\frac{da'''}{dt}\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''+\ldots+\frac{dT}{dt},$$

причем все дифференциалы

$$d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right),\ d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right),\ d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right),\ d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right),\ \ldots$$

$$\ldots,\ da,\ da',\ da'',\ da''',\ \ldots$$

взяты с учетом всего того, что изменяется вместе с t. Но величины $\frac{ds}{dt}\cos\theta$, $\frac{ds'}{dt}\cos\theta'$, $\frac{ds''}{dt}\cos\theta''$, $\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''$, ... изменяются как вследствие изменений величины и направления перемещений ds, ds', ds'', ds''', ..., так и вследствие изменений направлений (A), (A'), (A''), (A'''), ..., если они изменяются вместе с t; мы можем разделить эти две причины и заменить производные

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt},\ \frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt},\ \frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt},\ \frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}\ \ldots$$

соответственно через

$$\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}-\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta,\quad \frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}-\frac{ds'}{dt}\frac{d\theta'}{dt}\sin\theta',$$

$$\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}-\frac{ds''}{dt}\frac{d\theta''}{dt}\sin\theta'',\quad \frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}-\frac{ds'''}{dt}\frac{d\theta'''}{dt}\sin\theta''',\ \ldots;$$

мы помещаем в первых членах этих разностей все то, что изменяется с величиной и направлением ds, ds', ds'', ds''', ..., а вторые их члены содержат все то, что зависит от изменений направлений (A), (A'), (A''), (A'''), ...; мы имеем таким образом

$$\frac{dU}{dt}=\frac{ad\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}+\frac{a'd\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}+\frac{a''d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}+$$
$$+\frac{a'''d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}+\ldots+\frac{ds}{dt}\frac{d(a\cos\theta)}{dt}+\frac{ds'}{dt}\frac{d(a'\cos\theta')}{dt}+$$
$$+\frac{ds''}{dt}\frac{d(a''\cos\theta'')}{dt}+\frac{ds'''}{dt}\frac{d(a'''\cos\theta''')}{dt}+\ldots+\frac{dT}{dt}.$$

Однако не следует забывать, что для получения дифференциалов $d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)$, $d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)$, $d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)$, $d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)$, ... нужно изменять в них θ, θ', θ'', θ''', ... лишь постольку, поскольку эти углы изменяются с изменениями направлений ds, ds', ds'', ds''', ..., и, напротив, в $d(a\cos\theta)$, $d(a'\cos\theta')$, $d(a''\cos\theta'')$, $d(a'''\cos\theta''')$, ... те же углы должны изменяться только вследствие изменений направлений (A), (A'), (A'') (A'''), ... Таким образом, дифференциалы $d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)$, $d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta\right)$, $d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)$, $d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)$, ..., как и $d(a\cos\theta)$, $d(a'\cos\theta')$, $d(a''\cos\theta'')$ $d(a'''\cos\theta''')$, ..., — неполные.

Таким же способом найдем производные $\frac{dU_1}{dt}$, $\frac{dU_2}{dt}$, $\frac{dU_3}{dt}$, ..., а именно, полагая для краткости

$$\left.\begin{aligned}N&=\frac{ds}{dt}d\left(\frac{a\cos\theta}{dt}\right)+\frac{ds'}{dt}d\left(\frac{a'\cos\theta'}{dt}\right)+\frac{ds''}{dt}d\left(\frac{a''\cos\theta''}{dt}\right)+\\&\quad+\frac{ds'''}{dt}d\left(\frac{a'''\cos\theta'''}{dt}\right)+\ldots+\frac{dT}{dt},\\N_1&=\frac{ds}{dt}d\left(\frac{a_1\cos\theta_1}{dt}\right)+\frac{ds'}{dt}d\left(\frac{a_1'\cos\theta_1'}{dt}\right)+\frac{ds''}{dt}d\left(\frac{a_1''\cos\theta_1''}{dt}\right)+\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_1'''\cos\theta_1'''}{dt}\right)+\ldots+\frac{dT_1}{dt},\\
N_2=\;&\frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a_2\cos\theta_2}{dt}\right)+\frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a_2'\cos\theta_2'}{dt}\right)+\frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a_2''\cos\theta_2''}{dt}\right)+\\
&+\frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_2'''\cos\theta_2'''}{dt}\right)+\ldots+\frac{dT_2}{dt},\\
N_3=\;&\frac{ds}{dt}\,d\left(\frac{a_3\cos\theta_3}{dt}\right)+\frac{ds'}{dt}\,d\left(\frac{a_3'\cos\theta_3'}{dt}\right)+\frac{ds''}{dt}\,d\left(\frac{a_3''\cos\theta_3''}{dt}\right)+\\
&+\frac{ds'''}{dt}\,d\left(\frac{a_3'''\cos\theta_3'''}{dt}\right)+\ldots+\frac{dT_3}{dt},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad(5)
$$

получим

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt}=\;&a\,\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta\right)}{dt}+a'\,\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta'\right)}{dt}+a''\,\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta''\right)}{dt}+\\
&+a'''\,\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta'''\right)}{dt}+\ldots+N,\\
\frac{dU_1}{dt}=\;&a_1\,\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_1\right)}{dt}+a_1'\,\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_1'\right)}{dt}+a_1''\,\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_1''\right)}{dt}+\\
&+a_1'''\,\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta_1'''\right)}{dt}+\ldots+N_1,\\
\frac{dU_2}{dt}=\;&a_2\,\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_2\right)}{dt}+a_2'\,\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_2'\right)}{dt}+a_2''\,\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_2''\right)}{dt}+\\
&+a_2'''\,\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta_2'''\right)}{dt}+\ldots+N_2,\\
\frac{dU_3}{dt}=\;&a_3\,\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\cos\theta_3\right)}{dt}+a_3'\,\frac{d\left(\frac{ds'}{dt}\cos\theta_3'\right)}{dt}+a_3''\,\frac{d\left(\frac{ds''}{dt}\cos\theta_3''\right)}{dt}+\\
&+a_3'''\,\frac{d\left(\frac{ds'''}{dt}\cos\theta_3'''\right)}{dt}+\ldots+N_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right\}\quad(6)
$$

Подставляя эти значения в неравенства (4), будем иметь условия возможных перемещений, вычисленные с точностью до dt^3.

Действительное перемещение системы должно заключаться среди возможных перемещений; поэтому, если не принимать во внимание dt^2, оно должно удовлетворять условиям (3); но если сохранить dt^2, действительное перемещение будет удовлетворять условиям (4).

Обозначим через v, v', v'', v''', ... скорости масс m, m', m'', m''', ... по прошествии времени t, через ω, ω', ω'', ω''', ... — углы, которые направления v, v', v'', v''', ... образуют соответственно с данными направлениями (A) (A'), (A''), (A'''), ..., через ω_1, ω_1', ω_1'', ω_1''', ... — углы, которые те же скорости v, v', v'', v''', ... образуют соответственно со второй системой заданных направлений (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ..., через ω_2, ω_2', ω_2'', ω_2''', ... — углы, образуемые v, v', v'', v''', ... с третьей системой (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ..., и т. д. Обозначим через V, V_1, V_2, V_3, ..., то, во что превращаются величины U, U_1, U_2, U_3, ..., если заменить в них элементы ds через vdt, а θ — через ω, т. е. напишем

$$\left.\begin{array}{c} av\cos\omega + a'v'\cos\omega' + a''v''\cos\omega'' + a'''v'''\cos\omega''' + \ldots + T = V, \\ a_1v\cos\omega_1 + a_1'v'\cos\omega_1' + a_1''v''\cos\omega_1'' + a_1'''v'''\cos\omega_1''' + \\ + \ldots + T_1 = V_1 \\ a_2v\cos\omega_2 + a_2'v'\cos\omega_2' + a_2''v''\cos\omega_2'' + a_2'''v'''\cos\omega_2''' + \\ + \ldots + T_2 = V_2, \\ a_3v\cos\omega_3 + a_3'v'\cos\omega_3' + a_2''v''\cos\omega_3'' + a_3'''v'''\cos\omega_3''' + \\ + \ldots + T_3 = V_3, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Мы будем иметь, не принимая во внимание dt^2,

$$V > 0, \ V_1 > 0, \ V_2 > 0, \ V_3 > 0, \ \ldots \qquad (\alpha)$$

в качестве условий, которым должно удовлетворять *действительное перемещение системы;* знак $>$ в этих неравенствах не исклю-

чает знака равенства. Но если мы примем во внимание dt^2 и положим для сокращения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{vd\,(a\cos\omega)}{dt}+\frac{v'd\,(a'\cos\omega')}{dt}+\frac{v''d\,(a''\cos\omega'')}{dt}+\frac{v'''d\,(a'''\cos\omega''')}{dt}+\\
&\qquad+\ldots+\frac{dT}{dt}=M,\\
&\frac{vd\,(a_1\cos\omega_1)}{dt}+\frac{v'd\,(a_1'\cos\omega_1')}{dt}+\frac{v''d\,(a_1''\cos\omega_1'')}{dt}+\frac{v'''d\,(a_1'''\cos\omega_1''')}{dt}+\\
&\qquad+\ldots+\frac{dT_1}{dt}=M_1,\\
&\frac{vd\,(a_2\cos\omega_2)}{dt}+\frac{v'd\,(a_2'\cos\omega_2')}{dt}+\frac{v''d\,(a_2''\cos\omega_2'')}{dt}+\frac{v'''d\,(a_2'''\cos\omega_2''')}{dt}+\\
&\qquad+\ldots+\frac{dT_2}{dt}=M_2,\\
&\frac{vd\,(a_3\cos\omega_3)}{dt}+\frac{v'd\,(a_3'\cos\omega_3')}{dt}+\frac{v''d\,(a_3''\cos\omega_3'')}{dt}+\frac{v'''d\,(a_3'''\cos\omega_3''')}{dt}+\\
&\qquad+\ldots+\frac{dT_3}{dt}=M_3,\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

то условия действительного перемещения обратятся в

$$\left.\begin{aligned}
&Vdt+\frac{dV}{dt}\frac{dt^2}{2}>0,\\
&V_1dt+\frac{dV_1}{dt}\frac{dt^2}{2}>0,\\
&V_2dt+\frac{dV_2}{dt}\frac{dt^2}{2}>0,\\
&V_3dt+\frac{dV_3}{dt}\frac{dt^2}{2}>0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right\}\qquad(\beta)$$

причем знак $>$ не исключает знака равенства, а производные

$$\frac{dV}{dt},\ \frac{dV_1}{dt},\ \frac{dV_2}{dt},\ \frac{dV_3}{dt},\ \ldots$$

заданы уравнениями

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{ad\,(v\cos\omega)}{dt} + \frac{a'd\,(v'\cos\omega')}{dt} + \frac{a''d\,(v''\cos\omega'')}{dt} + \\
&+ \frac{a'''d\,(v'''\cos\omega''')}{dt} + \ldots + M, \\
\frac{dV_1}{dt} &= \frac{a_1 d\,(v\cos\omega_1)}{dt} + \frac{a'_1 d\,(v'\cos\omega'_1)}{dt} + \frac{a''_1 d\,(v''\cos\omega''_1)}{dt} + \\
&+ \frac{a'''_1 d\,(v'''\cos\omega'''_1)}{dt} + \ldots + M_1, \\
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{a_2 d\,(v\cos\omega_2)}{dt} + \frac{a'_2 d\,(v'\cos\omega'_2)}{dt} + \frac{a''_2 d\,(v''\cos\omega''_2)}{dt} + \\
&+ \frac{a'''_2 d\,(v'''\cos\omega'''_2)}{dt} + \ldots + M_2, \\
\frac{dV_3}{dt} &= \frac{a_3 d\,(v\cos\omega_3)}{dt} + \frac{a'_3 d\,(v'\cos\omega'_3)}{dt} + \frac{a''_3 d\,(v''\cos\omega''_3)}{dt} + \\
&+ \frac{a'''_3 d\,(v'''\cos\omega'''_3)}{dt} + \ldots + M_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Нужно обратить внимание на то, что в этих формулах дифференциалы $d\,(v\cos\omega)$, $d\,(v'\cos\omega')$, $d\,(v''\cos\omega'')$, $d\,(v'''\cos\omega''')$, ..., $d\,(v\cos\omega_1)$, $d\,(v'\cos\omega'_1)$, ... — неполные, так же как и дифференциалы $d\,(a\cos\omega)$, $d\,(a'\cos\omega')$, $d\,(a''\cos\omega'')$, $d\,(a'''\cos\omega''')$, ..., $d\,(a_1\cos\omega_1)$, $d\,(a'_1\cos\omega'_1)$, ..., которые входят в M, M_1, M_2, M_3, ... В первых из этих дифференциалов следует рассматривать как постоянные направления (A), (A'), (A''), (A'''), ..., (A_1), (A'_1), ... и изменять величины ω лишь постольку, поскольку эти углы изменяются в результате изменений направлений скоростей v, v', v'', v''', ... в течение времени dt. Во вторых из этих дифференциалов, наоборот, величины ω должны изменяться лишь вследствие изменений направлений (A), (A'), (A''), (A'''), ..., (A_1), (A'_1), ..., так что если, например, ω обозначает угол, образуемый направлением (A) с направлением v в конце времени t, то в $d\,(a\cos\omega)$ следует взять за $\omega + d\omega$ угол, который то же направление скорости v составляет с направлением (A) по прошествии времени $t + dt$.

VIII. Рассмотрим ближе условия (3) или (4), чтобы отличить те из них, которые связывают перемещения системы, от тех, которые их не связывают. Следует сохранить только первые. Последние можно будет отбросить, ибо они будут относиться к препятствиям, которые в действительности ничему не противодействуют.

Чтобы выявить среди условий (4) те, которые связывают движение системы (s), определим перемещение системы (s) за время dt, предполагая все массы m, m', m'', m''', ... вполне свободными, и подставим это перемещение в неравенства (4); все неравенства, которые не будут удовлетворены указанной подстановкой, будут стеснять перемещение (s); наоборот, все те, которые удовлетворяются этой подстановкой, будут относиться к препятствиям, которые в действительности ничему не противодействуют и которые, следовательно, можно отбросить.

Если не принимать во внимание dt^2, то перемещения, которые приняли бы массы m, m', m'', m''', ..., если бы они были свободны, будут те же, что и их действительные перемещения, а именно: vdt — для массы m, $v'dt$ — для массы m', $v''dt$ — для массы m'', и т. д. Но если принимать в расчет dt^2, то к предыдущим перемещениям нужно прибавить действие $P\frac{dt^2}{2}$, $P'\frac{dt^2}{2}$, $P''\frac{dt^2}{2}$, $P'''\frac{dt^2}{2}$, ... сил P, P', P'', P''', ..., — каждое в направлении той силы, к которой оно относится. Таким образом, если обозначить через α, α', α'', α''', ... углы, составляемые силами P, P', P'', P''', ... соответственно с заданными направлениями (A), (A'), (A''), (A'''), ..., через α_1, α_1', α_1'', α_1''', ... — углы, которые эти силы образуют со второй системой заданных направлений (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ..., через α_2, α_2', α_2'', α_2''', ... — углы, которые эти силы образуют с третьей системой заданных направлений (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ..., и т. д., то проекции перемещений, которые получили бы массы m, m', m'', m''', ..., будучи свободными, были бы соответственно

$$v\cos\omega dt + P\cos\alpha\frac{dt^2}{2},\quad v'\cos\omega' dt + P'\cos\alpha'\frac{dt^2}{2},$$

$$v'' \cos \omega'' dt + P'' \cos \alpha'' \frac{dt^2}{2}, \quad v''' \cos \omega''' dt + P''' \cos \alpha''' \frac{dt^2}{2}$$

. . . .

для направлений (A), (A'), (A''), (A'''), . . .;

$$v \cos \omega_1 dt + P \cos \alpha_1 \frac{dt^2}{2}, \quad v' \cos \omega_1' dt + P' \cos \alpha_1' \frac{dt^2}{2},$$

$$v'' \cos \omega_1'' dt + P'' \cos \alpha_1'' \frac{dt^2}{2}, \quad v''' \cos \omega_1''' dt + P''' \cos \alpha_1''' \frac{dt^2}{2}$$

. . . .

для направлений (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), . . .;

$$v \cos \omega_2 dt + P \cos \alpha_2 \frac{dt^2}{2}, \quad v' \cos \omega_2' dt + P' \cos \alpha_2' \frac{dt^2}{2},$$

$$v'' \cos \omega_2'' dt + P'' \cos \alpha_2'' \frac{dt^2}{2}, \quad v''' \cos \omega_2''' dt + P''' \cos \alpha_2''' \frac{dt^2}{2}$$

. . . .

для направлений (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), . . .;

$$v \cos \omega_3 dt + P \cos \alpha_3 \frac{dt^2}{2}, \quad v' \cos \omega_3' dt + P' \cos \alpha_3' \frac{dt^2}{2},$$

$$v'' \cos \omega_3'' dt + P'' \cos \alpha_3'' \frac{dt^2}{2}, \quad v''' \cos \omega_3''' dt + P''' \cos \alpha_3''' \frac{dt^2}{2}$$

. . . .

для направлений (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), . . ., и т. д.

Вводя эти перемещения в условия (β) и полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned}
&aP \cos \alpha + a'P' \cos \alpha' + a''P'' \cos \alpha'' + a'''P''' \cos \alpha''' + \ldots \\
&\qquad \ldots + M = -Y, \\
&a_1 P \cos \alpha_1 + a_1' P' \cos \alpha_1' + a_1'' P'' \cos \alpha_1'' + a_1''' P''' \cos \alpha_1''' + \ldots \\
&\qquad \ldots + M_1 = -Y_1, \\
&a_2 P \cos \alpha_2 + a_2' P' \cos \alpha_2' + a_2'' P'' \cos \alpha_2'' + a_2''' P''' \cos \alpha_2''' + \ldots \\
&\qquad \ldots + M_2 = -Y_2, \\
&a_3 P \cos \alpha_3 + a_3' P' \cos \alpha_3' + a_3'' P'' \cos \alpha_3'' + a_3''' P''' \cos \alpha_3''' + \ldots \\
&\qquad \ldots + M_3 = -Y_3, \\
&\qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ,
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

найдем, что первые члены (4) обратятся соответственно в

$$\left.\begin{aligned} &V dt - Y \frac{dt^2}{2}, \\ &V_1 dt - Y_1 \frac{dt^2}{2}, \\ &V_2 dt - Y_2 \frac{dt^2}{2}, \\ &V_3 dt - Y_3 \frac{dt^2}{2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Теперь нужно учитывать знаки величин (γ), что нетрудно, ибо все V и Y содержат лишь величины, зависящие от положения и состояния системы в начале dt, а они считаются известными. Нужно отбросить те из условий (β), которые приводят к положительным значениям среди уравнений (7). Так, мы прежде всего отбросим все те условия из (β), которые дают положительные V, и оставим лишь те, которые дают для V значения отрицательные или равные нулю. Но из неравенств (α) или (β) видно, что ни одна из величин V не может быть отрицательной; поэтому все те, которые не положительны, могут быть только равны нулю. Стало быть, если мы исключим из (β) все неравенства, приводящие к положительным V, мы получим $V=0$, $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$, ..., и величины (γ) обратятся в $-Y\frac{dt^2}{2}$, $-Y_1\frac{dt^2}{2}$, $-Y_2\frac{dt^2}{2}$, $-Y_3\frac{dt^2}{2}$, ... Теперь мы должны еще исключить из остающихся неравенств (β) все те, которые приводят к отрицательным Y, так что из условий (β) после всех этих исключений сохранятся лишь те, которые дают одновременно

$$\left.\begin{aligned} V&=0, \\ V_1&=0, \\ V_2&=0, \\ V_3&=0, \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} Y &> 0, \\ Y_1 &> 0, \\ Y_2 &> 0, \\ Y_3 &> 0, \\ \ldots &, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

причем знак $>$ не исключает знака равенства. Таким образом, составив величины V, мы найдем, что одни из них равны нулю, а другие положительны; ни одна не может быть отрицательной. Среди условий (β) нужно полностью отбросить все те, которые приводят к положительным V; затем мы составляем величины Y, притом лишь те, которые соответствуют оставшимся из неравенств (β), а из этих последних исключим все, которые дают отрицательные Y; так что после всех сокращений из неравенств (β) сохранятся лишь те, которые дают для V значения, равные нулю, а для Y — значения положительные или равные нулю. Будет уже легко судить о значениях V и о знаке и значениях Y, ибо все эти величины зависят лишь от положения и состояния системы в начале dt.

Теперь дело будет идти лишь о величинах V и Y, которые удовлетворяют условиям (11) и (12). Знаки Y показывают, что величины V стремятся убывать или, по крайней мере, не стремятся возрастать. Но так как ни одна из этих величин не может убывать, то, значит, они все должны сохранять свое нулевое значение, и, следовательно, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 0, \\ \frac{dV_1}{dt} &= 0, \\ \frac{dV_2}{dt} &= 0, \\ \frac{dV_3}{dt} &= 0, \\ \ldots & . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

IX. Предыдущие формулы уже устанавливают соотношения между мгновенными перемещениями масс m, m', m'', m''', ..., перемещениями, определение которых и составляет нашу главную цель. Но так как числа уравнений (13) недостаточно для нахождения всего, что остается неизвестным в перемещениях, то мы добавим к ним уравнения, которых для этого недостает и которые можно получить только из рассмотрения сил, действующих на систему, как движущих, так и инерционных. Нужно сказать, что соображения, о которых идет речь, не представляют никакой трудности; они даже проще тех, к которым мы прибегали для вывода уравнений (13).

Если нужно отличить *действительное* перемещение системы (s) от всякого другого перемещения, если видно сначала, что действительное перемещение *должно находиться среди возможных* перемещений, — а мы даже доказали, что оно находится среди тех возможных перемещений, которые удовлетворяют условиям (13), — то нам остается только отличить его среди этих последних перемещений.

Для этого представим себе какое-либо *возможное перемещение*, обозначим его *для краткости через* (V), а через G, G', G'', G''', ... — силы инерции, относящиеся соответственно к массам m, m', m'', m''', ... и связанные с *перемещением* (V) системы. Обозначим также через R, R', R'', R''', ... равнодействующие: первую — сил mP и G, вторую — $m'P'$ и G', третью — $m''P''$ и G'' и т. д.

Далее мы можем приписать системе (s) *перемещение* (V) и прибавить к этому перемещению то перемещение, какое вызовут силы R, R', R'', R''', ..., приложенные соответственно к массам m, m', m'', m''', ... Очевидно, что перемещение (V) в совокупности с перемещением, которое вызывают силы R, R', R'', R''', ..., приведет к действительному перемещению. Поэтому если бы (V) уже было действительным перемещением, то силы R, R' R'', R''', ..., относящиеся к этому перемещению, не были бы способны произвести какое-либо действие. Наоборот, если (V) не является действительным перемещением, то силы R, R', R'', R''', ... необходимо произведут некоторый эффект.

Итак, вот весьма простой критерий, чтобы отличить действительное перемещение от всякого виртуального перемещения. Силы R, R', R'', R''', ..., относящиеся к действительному перемещению, неспособны произвести какое-либо действие, т. е. они взаимно уничтожаются, и это имеет место только для действительного перемещения; для всякого другого силы R, R', R'', R''', ... неизбежно произведут некоторое действие.

Силы R, R', R'', R''', ..., относящиеся к действительному перемещению, называются *потерянными силами*. Согласно сказанному выше, их рассмотрение имеет весьма большое значение. В самом деле, *условия, отличающие действительное перемещение от всякого возможного перемещения*, эквивалентны условиям, которые выражают равновесие потерянных сил. Приступим теперь к отысканию этих последних условий.

Чтобы находиться в равновесии, потерянные силы должны стремиться произвести лишь такие перемещения, которые, комбинируясь с теми, какие система получает в действительности, приводят к невозможным перемещениям. Для выражения этого условия представим себе какое-либо из перемещений, которое способны произвести потерянные силы; назовем его через (c) и положим, что δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... представляют движения масс m, m', m'', m''', ..., относящиеся к перемещению (c) системы. Величины δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ..., благодаря их изменяемости, можно будет отнести ко всем перемещениям системы, какие могут быть вызваны потерянными силами.

Если теперь мы обозначим через φ, φ', φ'', φ''', ... углы, которые перемещения δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... составляют соответственно с заданными направлениями (A), (A'), (A''), (A'''), ..., и если мы условимся обозначать теми же буквами — но со значками внизу — аналогичные углы, относящиеся к тем же движениям δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... и к другим системам (A_1), (A'_1), (A''_1), (A'''_1), ..., (A_2), (A'_2), (A''_2), (A'''_2), ..., (A_3), (A'_3), (A''_3), (A'''_3), ... заданных направлений, то будем иметь $\delta s\cos\varphi$, $\delta s'\cos\varphi'$, $\delta s''\cos\varphi''$, $\delta s'''\cos\varphi'''$, ... для проекций δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... на направления (A), (A'), (A''), (A'''), ... Снабжая последовательно значками 1, 2, 3, ... внизу углы φ, φ',

φ'', φ''', ..., получим проекции тех же движений δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... на другие заданные направления. Наконец, если мы будем комбинировать перемещения δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... с действительными перемещениями, то мы придем к движениям масс m, m', m'', m''', ..., проекции которых будут соответственно

$$v\cos\omega dt + \frac{dv\cos\omega}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s\cos\varphi,\quad v'\cos\omega' dt +$$
$$+ \frac{dv'\cos\omega'}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'\cos\varphi',$$
$$v''\cos\omega'' dt + \frac{dv''\cos\omega''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s''\cos\varphi'',\quad v'''\cos\omega''' dt +$$
$$+ \frac{dv'''\cos\omega'''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'''\cos\varphi'''$$

для направлений (A), (A'), (A''), (A'''), ...;

$$v\cos\omega_1 dt + \frac{dv\cos\omega_1}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s\cos\varphi_1,\quad v'\cos\omega_1' dt +$$
$$+ \frac{dv'\cos\omega_1'}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2}\delta s'\cos\varphi_1',$$
$$v''\cos\omega_1'' dt + \frac{dv''\cos\omega_1''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s''\cos\varphi_1'',\quad v'''\cos\omega_1''' dt +$$
$$+ \frac{dv'''\cos\omega_1'''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'''\cos\varphi_1'''$$

для направлений (A_1), (A_1'), (A_1''), (A_1'''), ...;

$$v\cos\omega_2 dt + \frac{dv\cos\omega_2}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s\cos\varphi_2,\quad v'\cos\omega_2' dt +$$
$$+ \frac{dv_2'\cos\omega_2'}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'\cos\omega_2',$$
$$v''\cos\omega_2'' dt + \frac{dv''\cos\omega_2''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s''\cos\varphi_2'',\quad v'''\cos\omega_2''' dt +$$
$$+ \frac{dv'''\cos\omega_2'''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'''\cos\varphi_2'''$$

для направлений (A_2), (A_2'), (A_2''), (A_2'''), ...;

$$v\cos\omega_3 dt + \frac{dv\cos\omega_3}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s\cos\varphi_3,\quad v'\cos\omega_3' dt +$$
$$+ \frac{dv'\cos\omega_3'}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'\cos\varphi_3',$$
$$v''\cos\omega_3'' dt + \frac{dv''\cos\omega_3''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s''\cos\varphi_3'',\quad v'''\cos\omega_3''' dt +$$
$$+ \frac{dv'''\cos\omega_3'''}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta s'''\cos\varphi_3'''$$

для направлений (A_3), (A_3'), (A_3''), (A_3'''), ... и т. д.

Повторяем здесь уже сделанное нами замечание, а именно, что величины ω в предыдущих формулах должны изменяться только в зависимости от изменения скоростей v, v', v'', v''', ..., но отнюдь не от изменений заданных направлений (A), (A'), ...

Если подставить написанные выше проекции в условия (β) и положить для краткости

$$\left.\begin{array}{l}
a\delta s\cos\varphi + a'\delta s'\cos\varphi' + a''\delta s''\cos\varphi'' + \\
\quad + a'''\delta s'''\cos\varphi''' + \ldots = \delta L, \\
a_1\delta s\cos\varphi_1 + a_1'\delta s'\cos\varphi_1' + a_1''\delta s''\cos\varphi_1'' + \\
\quad + a_1'''\delta s'''\cos\varphi_1''' + \ldots = \delta L_1, \\
a_2\delta s\cos\varphi_2 + a_2'\delta s'\cos\varphi_2' + a_2''\delta s''\cos\varphi_2'' + \\
\quad + a_2'''\delta s'''\cos\varphi_2''' + \ldots = \delta L_2, \\
a_3\delta s\cos\varphi_3 + a_3'\delta s'\cos\varphi_3' + a_3''\delta s''\cos\varphi_3'' + \\
\quad + a_3'''\delta s'''\cos\varphi_3''' + \ldots = \delta L_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

то первые части (β) обратятся соответственно в

$$V\,dt + \frac{dV}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta L,$$

$$V_1 dt + \frac{dV_1}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2} + \delta L_1,$$

$$V_2 dt + \frac{dV_2}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L_2,$$

$$V_3 dt + \frac{dV_3}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

а так как перемещения, которые подставлены в неравенства (β), являются невозможными, то эти величины не должны удовлетворять одновременно всем условиям

$$V dt + \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L > 0,$$

$$V_1 dt + \frac{dV_1}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L_1 > 0,$$

$$V_2 dt + \frac{dV_2}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L_2 > 0,$$

$$V_3 dt + \frac{dV_3}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2} + \delta L_3 > 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Другими словами, имея в виду уравнения (11) и (13), можно утверждать, что перемещения δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... не должны одновременно удовлетворять всем условиям: $\delta L > 0$, $\delta L_1 > 0$, $\delta L_2 > 0$, $\delta L_3 > 0$, ... Итак, для равновесия потерянных сил необходимо и достаточно, чтобы эти силы не могли произвести ни одного перемещения системы, удовлетворяющего вышеуказанным условиям

X. Предположим, что величины δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... *принадлежат не только к тем перемещениям системы, которые могут быть вызваны потерянными силами*, но также и ко всем другим перемещениям, возможным или невозможным, или, иными словами, будем рассматривать δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... как вполне произвольные. Мы должны выразить то обстоятельство, что потерянные

силы R, R', R'', R''', ... неспособны произвести какое-либо перемещение системы, удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{array}{ll} \delta L > 0, & \delta L_1 > 0, \\ \delta L_2 > 0, & \delta L_3 > 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \end{array}\right\} \tag{15}$$

где знак $>$ не исключает знака равенства.

Мы знаем, что система сил может вызвать всякое перемещение, которое дает для ее полного момента положительную величину, и не может вызвать ни одного из тех перемещений, которое отвечало бы отрицательным или нулевым значениям полного момента. Поэтому, чтобы потерянные силы не могли произвести никакого перемещения, которое удовлетворяло бы условиям (15), необходимо, чтобы их момент был для этих перемещений отрицателен или равен нулю, т. е. необходимо, чтобы функция

$$R\delta s \cos\psi + R'\delta s' \cos\psi' + R''\delta s'' \cos\psi'' + R'''\delta s''' \cos\psi''' + \ldots,$$

в которой ψ, ψ', ψ'', ψ''', ... обозначают соответственно углы $R\hat{\ }\delta s$, $R'\hat{\ }\delta s'$, $R''\hat{\ }\delta s''$, $R'''\hat{\ }\delta s'''$, ..., и которая, следовательно, представляет момент сил R, R', R'', R''', ..., была отрицательна или равна нулю всегда, когда δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... удовлетворяют условиям (15).

Решение вопроса о том, чтобы сделать функцию

$$R\delta s \cos\psi + R'\delta s' \cos\psi' + R''\delta s'' \cos\psi'' + R'''\delta s''' \cos\psi''' + \ldots$$

отрицательной или равной нулю каждый раз, когда функции того же рода δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... положительны или равны нулю, относится к задачам самой элементарной алгебры. Необходимо и достаточно, чтобы

$$R\delta s \cos\psi + R'\delta s' \cos\psi' + R''\delta s'' \cos\psi'' + R'''\delta s''' \cos\psi''' + \ldots$$

могло быть приведено к линейной функции от δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... с отрицательными коэффициентами. Итак, нужно только положить, при любых δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ...,

$$R\delta s \cos\psi + R'\delta s' \cos\psi' + R''\delta s'' \cos\psi'' + R'''\delta s''' \cos\psi''' + \ldots = \\ = \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots$$

и прибавить к этому условие, чтобы все λ были отрицательными. Или же, если мы не хотим рассматривать все λ как отрицательные, то можно положить

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots =$$
$$= -(\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots),$$

тогда все λ будут положительными. Из последнего уравнения, как и из предшествующего, очевидно, что момент

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots$$

будет отрицателен или равен нулю каждый раз, когда функции δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... будут положительны или равны нулю.

Перенося все члены в левую часть, получим уравнение равновесия потерянных сил в виде

$$R\delta s\cos\psi + R'\delta s'\cos\psi' + R''\delta s''\cos\psi'' + R'''\delta s'''\cos\psi''' + \ldots$$
$$+ \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots = 0; \qquad (16)$$

оно должно иметь место, каковы бы ни были δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... как по величине, так и по направлению. Но нужно не забыть присоединить к уравнению (16) неравенства

$$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0, \\ \lambda_1 > 0, \\ \lambda_2 > 0, \\ \lambda_3 > 0, \\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Обозначим через ε, ε', ε'', ε''', ... и через θ, θ', θ'', θ''', ... углы, которые перемещения δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ... образуют соответственно с силами P, P', P'', P''', ... и с направлениями скоростей v, v', v'', v''', ... Тогда будем иметь

$$R\cos\psi = m\left(P\cos\varepsilon - \frac{dv\cos\theta}{dt}\right),$$

$$R'\cos\psi' = m'\left(P'\cos\varepsilon' - \frac{dv'\cos\theta'}{dt}\right),$$

$$R'' \cos \psi'' = m'' \left(P'' \cos \varepsilon'' - \frac{dv'' \cos \theta''}{dt} \right),$$

$$R''' \cos \psi''' = m''' \left(P''' \cos \varepsilon''' - \frac{dv''' \cos \theta'''}{dt} \right),$$

. . . .

Подставляя эти значения в формулу (16), найдем следующее уравнение для движения произвольной системы:

$$m \left(P \cos \varepsilon - \frac{dv \cos \theta}{dt} \right) \delta s + m' \left(P' \cos \varepsilon' - \frac{dv' \cos \theta'}{dt} \right) \delta s' +$$
$$+ m'' \left(P'' \cos \varepsilon'' - \frac{dv'' \cos \theta''}{dt} \right) \delta s'' + m''' \left(P''' \cos \varepsilon''' - \frac{dv''' \cos \theta'''}{dt} \right) \delta s''' +$$
$$+ \ldots + \lambda \delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \cdots = 0; \qquad (18)$$

это уравнение, вместе с формулами (13), заключает все необходимое для определения действительного перемещения системы (s). Таким образом, общее решение поставленной нами задачи содержится в уравнениях (18) и (13). Что касается неравенств (17), то мы увидим, что они удовлетворяются одновременно с неравенствами (12), и, обратно, можно заменить неравенства (12) условиями (17); итак, достаточно принять во внимание те или другие из этих неравенств или же рассмотреть лишь некоторые из уравнений (12), заменив остальные через (17).

XI. Поскольку уравнение (18) должно иметь место для всех значений δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ..., необходимо, чтобы коэффициенты при этих величинах были отдельно равны нулю, иначе формула (18) устанавливала бы зависимость между абсолютно произвольными величинами, что невозможно; поэтому будем иметь

$$\left.\begin{aligned} & m \left(P \cos \varepsilon - \frac{dv \cos \theta}{dt} \right) + \lambda a \cos \varphi + \lambda_1 a_1 \cos \varphi_1 + \\ & \lambda_2 a_2 \cos \varphi_2 + \lambda_3 a_3 \cos \varphi_3 + \ldots = 0, \\ & m' \left(P' \cos \varepsilon' - \frac{dv' \cos \theta'}{dt} \right) + \lambda a' \cos \varphi' + \lambda_1 a_1' \cos \varphi_1' + \\ & + \lambda_2 a_2' \cos \varphi_2' + \lambda_3 a_3' \cos \varphi_3' + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
&m''\left(P''\cos\varepsilon'' - \frac{dv''\cos\theta''}{dt}\right) + \lambda a''\cos\varphi'' + \lambda_1 a_1''\cos\varphi_1'' + \\
&\qquad + \lambda_2 a_2''\cos\varphi_2'' + \lambda_3 a_3''\cos\varphi_3'' + \ldots = 0, \\
&m'''\left(P'''\cos\varepsilon''' - \frac{dv'''\cos\theta'''}{dt}\right) + \lambda a'''\cos\varphi''' + \lambda_1 a_1'''\cos\varphi_1''' + \\
&\qquad + \lambda_2 a_2'''\cos\varphi_2''' + \lambda_3 a_3'''\cos\varphi_3''' + \ldots = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

или же

$$\left.\begin{aligned}
&m\,\frac{dv\cos\theta}{dt} = m\,P\cos\varepsilon + \lambda a\cos\varphi + \lambda_1 a_1\cos\varphi_1 + \lambda_2 a_2\cos\varphi_2 + \\
&\qquad + \lambda_3 a_3\cos\psi_3 + \ldots, \\
&m'\,\frac{dv'\cos\theta'}{dt} = m'P'\cos\varepsilon' + \lambda a'\cos\varphi' + \lambda_1 a_1'\cos\varphi_1' + \\
&\qquad + \lambda_2 a_2'\cos\varphi_2' + \lambda_3 a_3'\cos\psi_3' + \ldots, \\
&m''\,\frac{dv''\cos\theta''}{dt} = m''P''\cos\varepsilon'' + \lambda a''\cos\varphi'' + \lambda_1 a_1''\cos\varphi_1'' + \\
&\qquad + \lambda_2 a_2''\cos\varphi_2'' + \lambda_3 a_3''\cos\varphi_3'' + \ldots, \\
&m'''\,\frac{dv'''\cos\theta'''}{dt} = m'''P'''\cos\varepsilon''' + \lambda a'''\cos\varphi''' + \lambda_1 a_1'''\cos\varphi_1''' + \\
&\qquad + \lambda_2 a_2'''\cos\varphi_2''' + \lambda_3 a_3'''\cos\varphi_3''' + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Из этих уравнений можно было бы определить проекции на любые направления действительных перемещений масс m, m', m'', m''', ..., если бы величины λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... были известны. Все сводится, таким образом, к определению λ, λ_1, λ_2, λ_3, ...; но прежде чем этим заняться, полезно заметить, что, согласно формулам (19) и (20), действительное перемещение системы (s) остается тем же, как если бы все массы m, m', m'', m''', ... были полностью свободны и на них, кроме заданных сил, действовали бы еще и другие силы, заменяющие условные уравнения, а именно:

$$\lambda a, \ \lambda_1 a_1, \ \lambda_2 a_2, \ \lambda_3 a_3, \ \ldots$$

для массы m;

$$\lambda a',\ \lambda_1 a'_1,\ \lambda_2 a'_2,\ \lambda_3 a'_3 \ldots$$

для массы m';

$$\lambda a'',\ \lambda_1 a''_1,\ \lambda_2 a''_2,\ \lambda_3 a''_3 \ldots$$

для массы m'', и т. д. Направления этих сил известны: они совпадают соответственно с заданными направлениями

$$\begin{array}{l}(A),\ (A_1),\ (A_2),\ (A_3),\ \ldots\\ (A'),\ (A'_1),\ (A'_2),\ (A'_3),\ \ldots\\ (A''),\ (A''_1),\ (A''_2),\ (A''_3),\ \ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Обозначим через Q равнодействующую движущих сил

$$\lambda a,\ \lambda_1 a_1,\ \lambda_2 a_2,\ \lambda_3 a_3,\ \ldots,$$

через Q' — равнодействующую сил

$$\lambda a',\ \lambda_1 a'_1,\ \lambda_2 a'_2,\ \lambda_3 a'_3,\ \ldots,$$

через Q'' — равнодействующую сил

$$\lambda a'',\ \lambda_1 a''_1,\ \lambda_2 a''_2,\ \lambda_3 a''_3,\ \ldots,$$

через Q''' — равнодействующую сил

$$\lambda a''',\ \lambda_1 a'''_1,\ \lambda_2 a'''_2,\ \lambda_3 a'''_3,\ \ldots,$$

и т. д Используя хорошо известные соотношения между равнодействующими и их составляющими, мы можем заменить уравнения (20) следующими:

$$\left.\begin{array}{r}m\dfrac{dv\cos\theta}{dt}=mP\cos\varepsilon+Q\cos\psi,\\ m'\dfrac{dv'\cos\theta'}{dt}=m'P'\cos\varepsilon'+Q'\cos\psi',\\ m''\dfrac{dv''\cos\theta''}{dt}=m''P''\cos\varepsilon''+Q''\cos\psi'',\\ m'''\dfrac{dv'''\cos\theta'''}{dt}=m'''P'''\cos\varepsilon'''+Q'''\cos\psi''',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\qquad(21)$$

ψ, ψ', ψ'', ψ''', ... обозначают углы, образуемые силами Q, Q', Q'', Q''', ..., с направлениями, к которым относятся углы θ, θ', θ'', θ''', ... и ε. ε', ε'', ε''', ...

XII. Займемся теперь определением величин λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... Для этого, вычитая из (10) уравнения (13), подставим вместо $\frac{dV}{dt}$, $\frac{dV_1}{dt}$, $\frac{dV_2}{dt}$, $\frac{dV_3}{dt}$, ... их значения, полученные из уравнений (9). Мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&a\left(\frac{dv\cos\omega}{dt}-P\cos\alpha\right)+a'\left(\frac{dv'\cos\omega'}{dt}-P'\cos\alpha'\right)+\\
&\quad+a''\left(\frac{dv''\cos\omega''}{dt}-P''\cos\alpha''\right)+a'''\left(\frac{dv'''\cos\omega'''}{dt}-P'''\cos\alpha'''\right)+\\
&\quad+\ldots=Y,\\
&a_1\left(\frac{dv\cos\omega_1}{dt}-P\cos\alpha_1\right)+a_1'\left(\frac{dv'\cos\omega_1'}{dt}-P'\cos\alpha_1'\right)+\\
&\quad+a_1''\left(\frac{dv''\cos\omega_1''}{dt}-P''\cos\alpha_1''\right)+a_1'''\left(\frac{dv'''\cos\omega_1'''}{dt}-P'''\cos\alpha_1'''\right)+\\
&\quad+\ldots=Y_1,\\
&a_2\left(\frac{dv\cos\omega_2}{dt}-P\cos\alpha_2\right)+a_2'\left(\frac{dv'\cos\omega_2'}{dt}-P'\cos\alpha_2'\right)+\\
&\quad+a_2''\left(\frac{dv''\cos\omega_2''}{dt}-P''\cos\alpha_2''\right)+a_2'''\left(\frac{dv'''\cos\omega_2'''}{dt}-P'''\cos\alpha_2'''\right)+\\
&\quad+\ldots=Y_2,\\
&a_3\left(\frac{dv\cos\omega_3}{dt}-P\cos\alpha_3\right)+a_3'\left(\frac{dv'\cos\omega_3'''}{dt}-P'\cos\alpha_3'\right)+\\
&\quad+a_3''\left(\frac{dv''\cos\omega_3''}{dt}-P''\cos\alpha_3''\right)+a_3'''\left(\frac{dv'''\cos\omega_3'''}{dt}-P'''\cos\alpha_3'''\right)+\\
&\quad+\ldots=Y_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Теперь отнесем уравнение (21): первое последовательно к направлениям (A), (A_1), (A_2), (A_3), ..., второе последовательно к направлениям (A'), (A_1'), (A_2'), (A_3'), ..., третье к направлениям (A''), (A_1''), (A_2''), (A_3''), ... и т. д.; получим

$$\frac{dv\cos\omega}{dt} - P\cos\alpha = \frac{Q}{m}\cos\widehat{AQ},$$

$$\frac{dv'\cos\omega'}{dt} - P'\cos\alpha' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'},$$

$$\frac{dv''\cos\omega''}{dt} - P''\cos\alpha'' = \frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''},$$

$$\frac{dv'''\cos\omega'''}{dt} - P'''\cos\alpha''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''},$$

. . . .

$$\frac{dv\cos\omega_1}{dt} - P\cos\alpha_1 = \frac{Q}{m}\cos\widehat{A_1Q},$$

$$\frac{dv'\cos\omega_1'}{dt} - P'\cos\alpha_1' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_1'Q'},$$

$$\frac{dv''\cos\omega_1''}{dt} - P''\cos\alpha_1'' = \frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A_1''Q''},$$

$$\frac{dv'''\cos\omega_1'''}{dt} - P'''\cos\alpha_1''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_1'''Q'''},$$

. . . .

$$\frac{dv\cos\omega_2}{dt} - P\cos\alpha_2 = \frac{Q}{m}\cos\widehat{A_2Q},$$

$$\frac{dv'\cos\omega_2'}{dt} - P'\cos\alpha_2' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_2'Q'},$$

$$\frac{dv''\cos\omega_2''}{dt} - P''\cos\alpha_2'' = \frac{Q''}{m''}\cos\widehat{A_2''Q''},$$

$$\frac{dv'''\cos\omega_2'''}{dt} - P'''\cos\alpha_2''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_2'''Q'''},$$

. . . .

$$\frac{dv\cos\omega_3}{dt} - P\cos\alpha_3 = \frac{Q}{m}\cos\widehat{A_3Q}$$

$$\frac{dv'\cos\omega_3'}{dt} - P'\cos\alpha_3' = \frac{Q'}{m'}\cos\widehat{A_3'Q'},$$

$$\frac{dv''\cos\omega_3''}{dt} - P''\cos\alpha_3'' = \frac{Q''}{m''}\cos \widehat{A_3''Q''},$$

$$\frac{dv'''\cos\omega_3'''}{dt} - P'''\cos\alpha_3''' = \frac{Q'''}{m'''}\cos \widehat{A_3'''Q'''},$$

. . . .

и т. д.

Подставляя эти значения в формулы (22), находим

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{aQ}{m}\cos\widehat{AQ} + \frac{a'Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'} + \frac{a''Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''} + \\
+ \frac{a'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''} + \ldots = Y, \\
\frac{a_1Q}{m}\cos\widehat{A_1Q} + \frac{a_1'Q'}{m'}\cos\widehat{A_1'Q'} + \frac{a_1''Q''}{m''}\cos\widehat{A_1''Q''} + \\
+ \frac{a_1'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_1'''Q'''} + \ldots = Y_1, \\
\frac{a_2Q}{m}\cos\widehat{A_2Q} + \frac{a_2'Q'}{m'}\cos\widehat{A_2'Q'} + \frac{a_2''Q''}{m''}\cos\widehat{A_2''Q''} + \\
+ \frac{a_2'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_2'''Q'''} + \ldots = Y_2, \\
\frac{a_3Q}{m}\cos\widehat{A_3Q} + \frac{a_3'Q'}{m'}\cos\widehat{A_3'Q'} + \frac{a_3''Q''}{m''}\cos\widehat{A_3''Q''} + \\
+ \frac{a_3'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A_3'''Q'''} + \ldots = Y_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \qquad (23)$$

Если положим для сокращения

$$\lambda Y + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + \ldots = 0 \qquad (24)$$

и примем во внимание уравнения

$$Q = a\lambda\cos\widehat{AQ} + a_1\lambda_1\cos\widehat{A_1Q} + a_2\lambda_2\cos\widehat{A_2Q} + a_3\lambda_3\cos\widehat{A_3Q} + \ldots,$$

$$Q' = a'\lambda\cos\widehat{A'Q'} + a_1'\lambda_1\cos\widehat{A_1'Q'} + a_2'\lambda_2\cos\widehat{A_2'Q'} + a_3'\lambda_3\cos\widehat{A_3'Q'} + \ldots,$$

$$Q'' = a''\lambda\cos\widehat{A''Q''} + a_1''\lambda_1\cos\widehat{A_1''Q''} + a_2''\lambda_2\cos\widehat{A_2''Q''} + a_3''\lambda_3\cos\widehat{A_3''Q''} + \ldots,$$

$$Q''' = a'''\lambda \cos \widehat{A'''Q'''} + a_1'''\lambda_1 \cos \widehat{A_1'''Q'''} + a_2'''\lambda_2 \cos \widehat{A_2'''Q'''} +$$
$$+ a_3'''\lambda_3 \cos \widehat{A_3'''Q'''} + \ldots,$$

то найдем, умножив уравнения (23) — первое на λ второе на λ_1, третье на λ_2 и т. д. — и сложив результаты,

$$\theta = \frac{Q^2}{m} + \frac{Q'^2}{m'} + \frac{Q''^2}{m''} + \frac{Q'''^2}{m'''} + \ldots \qquad (25)$$

Дифференцирование по λ дает

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 2\left(\frac{aQ}{m}\cdot\frac{dQ}{da\lambda} + \frac{a'Q'}{m'}\cdot\frac{dQ'}{da'\lambda} + \frac{a''Q''}{m''}\cdot\frac{dQ''}{da''\lambda} + \frac{a'''Q'''}{m'''}\cdot\frac{dQ'''}{da'''\lambda} + \ldots\right),$$

но мы знаем, согласно правилу сложения сил, что частные производные

$$\frac{dQ}{da\lambda}, \quad \frac{dQ'}{da'\lambda}, \quad \frac{dQ''}{da''\lambda}, \quad \frac{dQ'''}{da'''\lambda}, \ldots$$

суть косинусы углов, образуемых равнодействующими Q, Q', Q'', Q''', ... соответственно с составляющими $a\lambda$, $a'\lambda$, $a''\lambda$, $a'''\lambda$, ...; поэтому

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 2\left(\frac{aQ}{m}\cos\widehat{AQ} + \frac{a'Q'}{m'}\cos\widehat{A'Q'} + \frac{a''Q''}{m''}\cos\widehat{A''Q''} + \right.$$
$$\left. + \frac{a'''Q'''}{m'''}\cos\widehat{A'''Q'''} + \ldots\right),$$

или, принимая во внимание первое из уравнений (23),

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 2Y.$$

Точно так же найдем

$$\frac{d\theta}{d\lambda_1} = 2Y_1, \quad \frac{d\theta}{d\lambda_2} = 2Y_2, \quad \frac{d\theta}{d\lambda_3} = 2Y_3;$$

итак, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\lambda} &= 2Y; \\ \frac{d\theta}{d\lambda_1} &= 2Y_1, \\ \frac{d\theta}{d\lambda_2} &= 2Y_2, \\ \frac{d\theta}{d\lambda_3} &= 2Y_3, \\ \ldots & \ldots \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Нетрудно выразить величину θ через λ_1, λ_2, λ_3, ... Для этого нужно только подставить в (25) на место Q^2, Q'^2, Q''^2, Q'''^2, ... их величины, определяемые известными уравнениями

$$Q^2 = a^2\lambda^2 + a_1^2\lambda_1^2 + a_2^2\lambda_2^2 + a_3^2\lambda_3^2 + \ldots +$$

$$+ 2aa_1\lambda\lambda_1 \cos \widehat{aa_1} + 2aa_2\lambda\lambda_2 \cos \widehat{aa_2} + 2a_1a_2\lambda_1\lambda_2 \cos \widehat{a_1a_2} + \ldots,$$

$$Q'^2 = a'^2\lambda^2 + a_1'^2\lambda_1^2 + a_2'^2\lambda_2^2 + a_3'^2\lambda_3^2 + \ldots +$$

$$+ 2a'a_1'\lambda\lambda_1 \cos \widehat{a'a_1'} + 2a'a_2'\lambda\lambda_2 \cos \widehat{a'a_2'} + 2a_1'a_2'\lambda_1\lambda_2 \cos \widehat{a_1'a_2'} + \ldots,$$

$$Q''^2 = a''^2\lambda^2 + a_1''^2\lambda_1^2 + a_2''^2\lambda_2^2 + a_3''^2\lambda_3^2 + \ldots +$$

$$+ 2a''a_1''\lambda\lambda_1 \cos \widehat{a''a_1''} + 2a''a_2''\lambda\lambda_2 \cos \widehat{a''a_2''} + 2a_1''a_2''\lambda_1\lambda_2 \cos \widehat{a_1''a_2''} + \ldots,$$

$$Q'''^2 = a'''^2\lambda^2 + a_1'''^2\lambda_1^2 + a_2'''^2\lambda_2^2 + a_3'''^2\lambda_3^2 + \ldots +$$

$$+ 2a'''a_1'''\lambda\lambda_1 \cos \widehat{a'''a_1'''} + 2a'''a_2'''\lambda\lambda_2 \cos \widehat{a'''a_2'''} + 2a_1'''a_2'''\lambda_1\lambda_2 \cos \widehat{a_1'''a_2'''} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

в которых мы для простоты написали $\widehat{aa_1}$, $\widehat{aa_2}$, $\widehat{a_1a_2}$, $\widehat{a'a_1'}$, ... вместо $a\lambda\,\widehat{\ }\,a_1\lambda_1$, $a\lambda\,\widehat{\ }\,a_2\lambda_2$, $a_1\lambda_1\,\widehat{\ }\,a_2\lambda_2$, $a'\lambda\,\widehat{\ }\,a'\lambda_1$, ...; получаем

$$\theta = \left(\frac{a^2}{m} + \frac{a'^2}{m'} + \frac{a''^2}{m''} + \frac{a'''^2}{m'''} + \ldots\right)\lambda^2 + \left(\frac{a_1^2}{m} + \frac{a_1'^2}{m'} + \frac{a_1''^2}{m''} +\right.$$

$$\left. + \frac{a_1'''^2}{m'''} + \ldots\right)\lambda_1^2 + \left(\frac{a_2^2}{m} + \frac{a_2'^2}{m'} + \frac{a_2''^2}{m''} + \frac{a_2'''^2}{m'''} + \ldots\right)\lambda_2^2 +$$

$$+\left(\frac{a_3^2}{m}+\frac{a_3'^2}{m'}+\frac{a_3''^2}{m''}+\frac{a_3'''^2}{m'''}+\ldots\right)\lambda_3^2+2\left(\frac{aa_1}{m}\cos\widehat{aa_1}+\right.$$

$$+\frac{a'a_1'}{m'}\cos\widehat{a'a_1'}+\frac{a''a_1''}{m''}\cos\widehat{a''a_2''}+\frac{a'''a_1'''}{m'''}\cos\widehat{a'''a_1'''}+\ldots\Big)\lambda\lambda_1+$$

$$+2\left(\frac{aa_2}{m}\cos\widehat{aa_2}+\frac{a'a_2'}{m'}\cos\widehat{a'a_2'}+\frac{a''a_2''}{m''}\cos\widehat{a''a_2''}+\frac{a'''a_2'''}{m'''}\times\right.$$

$$\times\cos\widehat{a'''a_2'''}+\ldots\Big)\lambda\lambda_2+2\left(\frac{aa_3}{m}\cos\widehat{aa_3}+\frac{a'a_3'}{m'}\cos\widehat{a'a_3'}+\frac{a''a_3''}{m''}\cos\widehat{a''a_3''}+\right.$$

$$+\frac{a'''a_3'''}{m'''}\cos\widehat{a'''a_3'''}+\ldots\Big)\lambda\lambda_3+2\left(\frac{a_1a_2}{m}\cos\widehat{a_1a_2}+\frac{a_1'a_2'}{m'}\cos\widehat{a_1'a_2'}+\right.$$

$$+\frac{a_1''a_2''}{m''}\cos\widehat{a_1''a_2''}+\frac{a_1'''a_2'''}{m'''}\cos\widehat{a_1'''a_2'''}+\ldots\Big)\lambda_1\lambda_2+$$

$$+2\left(\frac{a_1a_3}{m}\cos\widehat{a_1a_3}+\frac{a_1'a_3'}{m'}\cos\widehat{a_1'a_3'}+\frac{a_1''a_3''}{m''}\cos\widehat{a_1''a_3''}+\right.$$

$$+\frac{a_1'''a_3'''}{m'''}\cos\widehat{a_1'''a_3'''}+\ldots\Big)\lambda_1\lambda_3+2\left(\frac{a_2a_3}{m}\cos\widehat{a_2a_3}+\frac{a_2'a_3'}{m'}\cos\widehat{a_2'a_3'}+\right.$$

$$+\frac{a_2''a_3''}{m''}\cos\widehat{a_2''a_3''}+\frac{a_2'''a_3'''}{m'''}\cos\widehat{a_2'''a_3'''}+\ldots\Big)\lambda_2\lambda_3+\ldots,$$

. . . .

или, обозначая коэффициенты при $\lambda_m\lambda_n$ через (a_m, a_n), т. е. полагая $\frac{a_ma_n}{m}\cos\widehat{a_ma_n}+\frac{a_m'a_n'}{m'}\cos\widehat{a_m'a_n'}+\frac{a_m''a_n''}{m''}\cos\widehat{a_m''a_n''}+\frac{a_m'''a_n'''}{m'''}\cos\widehat{a_m'''a_n'''}=$

$$=(a_m, a_n)=(a_n, a_m),$$

имеем

$$0=(a, a)\lambda^2+(a_1, a_1)\lambda_1^2+(a_2, a_2)\lambda_2^2+(a_3, a_3)\lambda_3^2+\ldots+$$

$$+2(a, a_1)\lambda\lambda_1+2(a, a_2)\lambda\lambda_2+2(a, a_3)\lambda\lambda_3+2(a_1, a_2)\lambda_1\lambda_2+$$

$$+2(a_1, a_3)\lambda_1\lambda_3+2(a_2, a_3)\lambda_2\lambda_3+\ldots, \qquad (27)$$

и поэтому уравнения (26) обратятся в

$$\left.\begin{array}{l}(a,\ a)\lambda+(a,\ a_1)\lambda_1+(a,\ a_2)\lambda_2+(a,\ a_3)\lambda_3+\ldots=Y,\\(a_1,\ a)\lambda+(a_1,\ a_1)\lambda_1+(a_1,\ a_2)\lambda_2+(a_1,\ a_3)\lambda_3+\ldots=Y_1,\\(a_2,\ a)\lambda+(a_2,\ a_1)\lambda_1+(a_2,\ a_2)\lambda_2+(a_2,\ a_3)\lambda_3+\ldots=Y_2,\\(a_3,\ a)\lambda+(a_3,\ a_1)\lambda_1+(a_2,\ a_3)\lambda_2+(a_3,\ a_3)\lambda_3+\ldots=Y_3,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(28)$$

Уравнений (28) столько же, сколько и величин λ, λ_1, λ_2, λ_3, ...; они послужат для определения этих последних. Можно было бы вывести уравнения (28) из (23); для этого нужно было бы только заменить в последних проекции $Q\cos\widehat{AQ}$, $Q'\cos\widehat{A'Q'_1}$, $Q''\cos\widehat{A''Q''}$, $Q'''\cos\widehat{A'''Q'''}$, ..., $Q\cos\widehat{A_1Q}$, $Q'\cos\widehat{A'_1Q'}$, ... равнодействующих Q, Q', Q'', Q''', ... проекциями их составляющих.

Заметим мимоходом следующее: если бы нам надо было определить условия равновесия системы (s), могло бы случиться, что число условий для возможного перемещения превзошло бы число неизвестных задачи. Этот случай никогда не может представиться при движении; после того как мы отбросим условия возможных перемещений, не оказывающих никакого препятствия движению системы, число оставшихся условий никогда не превзойдет числа неизвестных. Но при отыскании условий равновесия случай, о котором мы говорим, может иметь место. Он не представит никакой особой трудности, но поведет к некоторой неопределенности, подобной той, какая наблюдается для случая равновесия твердого тела, опирающегося на устойчивую плоскость. Никто, насколько я знаю, не замечал неопределенности в задачах о равновесии для случаев, отличных от упомянутого нами сейчас; мы видим теперь, что неопределенность будет представляться всегда, когда число условий для возможных перемещений превысит число неизвестных задачи.

Уравнения (28) решаются легко, ибо эти уравнения всего только первого порядка. После определения величин λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... останется только подставить их в формулы (20), чтобы получить проекции искомых перемещений на любые направления

и, таким образом, поставленные нами задачи оказываются полностью разрешенными.

XIII. Найдя уравнения, определяющие мгновенное перемещение системы (s), мы можем ими воспользоваться для определения движения этой системы в течение какого-либо конечного времени. Действительно, пусть положение и состояние системы (s) известны для $t = t'$; тогда следует определить для этого же момента значения V, затем значения Y, на основании чего мы сможем судить, какие из *условий для возможных перемещений* надлежит сохранить и какие следует отбросить. Затем, найдя все λ из (28) и подставив их в (20), мы проинтегрируем эти последние уравнения, принимая во внимание формулы (12) и начальное состояние системы; и когда интегрирование даст все неизвестные нашей задачи, мы исследуем значения Y. Пока эти значения будут положительны, вопрос решается благополучно. Но если, начиная с некоторого момента $t = t''$, одно или несколько значений Y окажутся отрицательными, то решение с этого момента будет неверным, и нужно будет рассмотреть вопрос вновь на основании тех же принципов, начиная с момента $t = t''$; этот момент будет относиться к начальному состоянию нового движения, которому предстоит начаться. Вместо величин Y можно рассматривать величины λ, ибо и те и другие принимают одновременно положительные или отрицательные значения; так что если одна из величин Y положительна, то можно с уверенностью утверждать, что соответствующее λ также положительно, а когда Y станет отрицательным, станет отрицательным и λ. Между тем может случиться, что исследование величин λ проще, чем исследование Y, и тогда бывает полезно использовать неравенства (17), которые могут заменить неравенства (12).

Мы предполагаем в последующей работе применить изложенные нами здесь принципы к некоторым частным случаям. Мы главным образом имеем в виду движение несжимаемых жидкостей.

О ПРИНЦИПЕ ВИРТУАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ И О СИЛЕ ИНЕРЦИИ

Трудолюбивый московский профессор г-н Брашман послал в 1837 г. на демидовский конкурс работу по статике. Давая Академии отзыв об этой работе, мы сказали, «что „Курс механики“ знаменитого французского математика Пуассона содержит несколько более или менее серьезных ошибок, причем одну весьма существенную, поскольку она относится к самым вершинам рациональной механики, а именно к выводу дифференциальных уравнений какой-либо системы». Так как многие выражали желание узнать определеннее, в чем состоит упомянутая нами ошибка, то мы вкратце это изложим. Для этого выпишем все, что к ней относится и что непосредственно ей предшествует в этом курсе механики г-на Пуассона.*

Дело идет о движении какой-либо системы.

«Пусть m, m', m'' и т. д. — массы точек системы, которую мы имеем в виду рассмотреть. Обозначим для момента времени t, отсчитываемого от начала движения, через x, y, z три прямоугольные координаты точки m, а через X, Y, Z — составляющие силы ускорения [1], приложенной к этой материальной точке, которые направлены по продолжениям x, y, z в положительные стороны. Условимся также обозначать теми же буквами — но со значками — соответствующие величины для точек m', m'' и т. д. Составляющие по направлениям X, Y, Z потерянной силы для точки m за момент dt будут

$$m\left(X - \frac{d^2X}{dt^2}\right), \quad m\left(Y - \frac{d^2Y}{dt^2}\right), \quad m\left(Z - \frac{d^2Z}{dt^2}\right);$$

* Том второй, стр. 394, № 531.

следовательно, в этой системе будет иметь место равновесие в предположении, что на точку m действуют указанные силы, а на другие точки m', m'' и т. д. — подобные же. Мы получим общее уравнение этого равновесия, подставив в уравнение, выражающее принцип виртуальных скоростей, три предыдущие составляющие вместо составляющих движущей силы, которая действовала бы на m; имеем

$$\sum m\left(X-\frac{d^2X}{dt^2}\right)\delta x+\sum m\left(Y-\frac{d^2Y}{dt^2}\right)\delta y+ \\ +\sum m\left(Z-\frac{d^2Z}{dt^2}\right)\delta z=0; \qquad (1)$$

суммы $\sum$ распространены на все точки m, m', m'' и т. д. системы и состоят поэтому из частей, число которых равно числу этих точек.

«Мы будем предполагать, что связи этих материальных точек выражены уравнениями

$$L=0, \quad L'=0, \quad L''=0 \text{ и т. д.,} \qquad (2)$$

где L, L', L'' и т. д. — заданные функции переменных x, y, z, x' и т. д. или некоторых из них, которые могут содержать время t явным образом. Если, например, точка m должна оставаться на поверхности, которая постепенно изменяет форму или которая движется в пространстве, и если $L=0$ представляет уравнение этой поверхности, то L будет заданной функцией от x, y, z и t.

«*Хотя силы, равновесие которых выражается уравнением* (1), *соответствуют количествам движения, потерянным в продолжение времени dt, и за это время положения точек m, m', m'' и т. д. изменяются бесконечно мало, однако можно предположить, что это равновесие имеет место в положениях, занимаемых этими точками в момент времени t. Иными словами, можно пренебречь изменением их положения за промежуток dt, так как это изменение меняет — пока положение изменяется — потерянные ими количества движения лишь на бесконечно малые второго порядка, а соответствующие движущие силы — на бесконечно малые первого порядка.*

Бесконечно малые перемещения, которые предполагаются принципом виртуальных скоростей и проекции которых на координатные оси выражаются через δx, δy, δz *для точки* m, *через* $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ — *для точки* m' *и т. д., должны, следовательно, удовлетворять условиям системы, имеющим место в конце времени* t; *следовательно, необходимо, чтобы уравнения* (2) *еще удовлетворялись, если подставить* $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $x'+\delta x'$ *и т. д. вместо* x, y, z, x' *и т. д., не изменяя времени* t, *которое они могут содержать явным образом; отсюда заключаем*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0,\\ &\frac{dL'}{dx}\delta x+\frac{dL'}{dy}\delta y+\frac{dL'}{dz}\delta z+\frac{dL'}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0,\\ &\frac{dL''}{dx}\delta x+\frac{dL''}{dy}\delta y+\frac{dL''}{dz}\delta z+\frac{dL''}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0». \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

В подчеркнутой выдержке знаменитый автор стремится доказать, что можно составить уравнение равновесия потерянных сил в предположении, что эти силы, как и положения точек m, m', m'' и т. д., относятся к времени t. Это основано на том, что можно пренебречь бесконечно малыми изменениями, испытываемыми за момент dt координатами системы и потерянными силами. Рассмотрение этих бесконечно малых более чем излишне, ибо оно лишь затемняет весьма ясную идею о равновесии потерянных сил. Невозможно себе представить, чтобы, устанавливая равновесие между этими силами, их, как и положение системы, можно было отнести к иному моменту, чем конец времени t. Но заметим хорошенько, что, говоря об их *бесконечно малых изменениях, которыми можно пренебречь*, автор дает повод считать применяемые им соображения лишь приближениями; а в этом случае было бы *весьма трудно* сказать, что́ же должно иметь место, если рассуждать строго.

Даже и без доказательства, которое дает автор, и вообще без всякого доказательства нужно согласиться, что координаты точек m, m', m'' и т. д. и потерянные силы должны быть отнесены

к началу момента dt. Нет ничего яснее этой истины. Но из этого не следует, *что бесконечно малые перемещения, предполагаемые принципом виртуальных скоростей и обозначаемые через* δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$ *и т. д., будут удовлетворять уравнениям* (3); или, что то же, из этого не будет следовать, *что уравнения* (2) *будут еще иметь место, если мы подставим в них* $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $x'+\delta x'$ *и т. д. вместо* x, y, z, x' *и т. д., не изменяя времени* t, *которое они могут содержать явным образом.*

Именно, чтобы избавиться от членов, обусловленных вариацией величины t, которая содержится в уравнениях (2) явным образом, Пуассон и прибег к рассуждению, против которого мы возражаем и которое, по нашему мнению, не только ничего не доказывает относительно этих членов, но и вообще вряд ли имеет большое значение в каком бы то ни было отношении. Если для того же случая, когда условия возможных перемещений содержат время явным образом, мы обратимся к первому изданию «Аналитической механики», мы найдем там следующее.*

«Вообще нужно заметить по поводу вариаций, что они относятся к протяжению, а не к продолжительности, так что в дифференцированиях, обозначаемых через δ, переменная t, обозначающая время, всегда должна рассматриваться как постоянная. Но по обстоятельствам задачи может случиться, что условные уравнения сами содержат время t; в этом случае они, собственно говоря, будут изменяться от одного момента к другому; тогда окажется, что некоторые из координат будут выражены в функции других координат и переменной t; и нужно будет учитывать изменяемость t в дифференцированиях, обозначаемых через d, но t будет считаться неизменяемым в дифференцированиях, обозначаемых через δ.

«То же предположение будет иметь место и для знака интеграла $\int$, который относится лишь к самому протяжению тела в каждый момент».

---

* Стр. 198.

Итак, Лагранж отбрасывает члены, зависящие от изменения переменной t, не объясняя причины этого. Следует заметить, что знаменитый автор исключил приведенное место из второго издания своего бессмертного труда. Было бы весьма интересно знать основания этого исключения.

Важно обратить внимание на то, что для случая движущейся системы принцип виртуальных скоростей должен быть изменен. Придется учитывать в этом случае мгновенное перемещение системы. Для этого нужно будет рассматривать как возможные только те перемещения, которые, *комбинируясь с действительным перемещением*, не нарушают условных уравнений.

Для сокращения назовем *перемещениями системы* совокупность перемещений всех точек, составляющих систему. Так, действительное перемещение представляет совокупность перемещений

$$dx+\frac{1}{2}d^2x,\quad dy+\frac{1}{2}d^2y,\quad dz+\frac{1}{2}d^2z,$$

$$dx'+\frac{1}{2}d^2x',\quad dy'+\frac{1}{2}d^2y',\quad dz'+\frac{1}{2}d^2z',$$

$$dx''+\frac{1}{2}d^2x'',\quad dy''+\frac{1}{2}d^2y'',\quad dz''+\frac{1}{2}d^2z''$$

и т. д., которые действительно испытываются точками m, m', m'' за время dt. Мы не дошли до дифференциалов третьего и более высокого порядка относительно времени, ибо в механике их не рассматривают с целью иметь право считать мгновенные перемещения прямолинейными.

Согласно сказанному нами о возможных перемещениях системы, комбинированные перемещения могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{array}{c} dx+\frac{1}{2}dx^2+\delta x,\quad dy+\frac{1}{2}dy^2+\delta y,\quad dz+\frac{1}{2}dz^2+\delta z,\\ dx'+\frac{1}{2}dx'^2+\delta x',\quad dy'+\frac{1}{2}dy'^2+\delta y',\\ dz'+\frac{1}{2}dz'^2+\delta z',\\ dx''+\frac{1}{2}dx''^2+\delta x'',\quad dy''+\frac{1}{2}dy''^2+\delta y'',\\ dz''+\frac{1}{2}dz''^2+\delta z'' \end{array}\right\}\qquad(4)$$

при условии, что *уравнения* (2) *будут еще иметь место, если мы подставим в них* $x+dx+\frac{1}{2}d^2x+\delta x$, $y+dy+\frac{1}{2}d^2y+\delta y$, $z+dz+$ $+\frac{1}{2}d^2z+\delta z$, $x'+dx'+\frac{1}{2}d^2x'+\delta x'$ и т. д. вместо x, y, z, x' и т. д., причем и время t — в случае, если оно входит в них явным образом, — должно быть изменено на его дифференциал dt. Новые координаты $x+dx+\frac{1}{2}d^2x+\delta x$ и т. д., т. е. координаты, относящиеся ко времени $t+dt$, должны удовлетворять уравнениям (2), взятым для момента времени $t+dt$; если этого не было бы, перемещения (4) нарушали бы условные уравнения и потому были бы невозможны.

Заменяя в уравнениях (2) величины x, y, z, x', ..., t соответственно через $x+dx+\frac{1}{2}d^2x+\delta x$, $y+dy+\frac{1}{2}d^2y+\delta y$, $z+dz+$ $+\frac{1}{2}d^2z+\delta z$, $x'+dx'+\frac{1}{2}d^2x'+\delta x'$, ..., $t+dt$ и принимая во внимание, что дифференциалы δx, δy, δz, $\delta x'$, ... суть бесконечно малые второго порядка, получим

$$0=L+dL+\frac{1}{2}d^2L+\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.},$$

$$0=L'+dL'+\frac{1}{2}d^2L'+\frac{dL'}{dx}\delta x+\frac{dL'}{dy}\delta y+\frac{dL'}{dz}\delta z+$$
$$+\frac{dL'}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.},$$

$$0=L''+dL''+\frac{1}{2}d^2L''+\frac{dL''}{dx}\delta x+\frac{dL''}{dy}\delta y+\frac{dL''}{dz}\delta z+$$
$$+\frac{dL''}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}$$

dL, dL', dL'' и т. д., d^2L, d^2L', d^2L'' и т. д. обозначают первый и второй дифференциалы по времени, причем изменяется все, что зависит от этой величины. Но уравнения

$$L=0,\quad L'=0,\quad L''=0 \text{ и т. д.}$$

дают

$$dL=0,\quad dL'=0,\quad dL''=0 \text{ и т. д.},$$
$$d^2L=0,\quad d^2L'=0,\quad d^2L''=0 \text{ и т. д.};$$

следовательно, получим

$$\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0,$$

$$\frac{dL'}{dx}\delta x+\frac{dL'}{dy}\delta y+\frac{dL'}{dz}\delta z+\frac{dL'}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0,$$

$$\frac{dL''}{dx}\delta x+\frac{dL''}{dy}\delta y+\frac{dL''}{dz}\delta z+\frac{dL''}{dx'}\delta x' \text{ и т. д.}=0$$

и т. д.

Перемещения, обозначаемые нами через δx, δy, δz, $\delta x'$ и т. д., суть те, которые предполагает для движущейся системы принцип виртуальных скоростей, а не те, для которых Пуассон применяет то же обозначение. Этот знаменитый математик ошибся относительно возможного перемещения, смешав его с невозможными; перемещения масс m, m', m'', ..., т. е. те перемещения, которые он обозначает через δx, δy, δz, $\delta x'$, ... и которые он считает возможными, на самом деле невозможны. Но, вследствие другой ошибки или вследствие неправильного вывода уравнений (3), эта ошибка оказалась исправленной. Нужно заметить, что, согласно Пуассону, как и согласно многим другим математикам, *действительное, фактическое перемещение невозможно.*

Мы отсылаем в отношении подробностей, касающихся движения систем, к другой нашей работе о возможных перемещениях,* где мы рассмотрели некоторую систему во всей ее общности. Мы считали, что она задана не алгебраическими уравнениями, а дифференциальными уравнениями или неравенствами, не предполагая даже, что эти дифференциалы должны быть полными.

Что касается более или менее существенных ошибок, ускользнувших от внимания великого математика, то мы разумеем под этим ненужное сужение принципа виртуальных скоростей, общ-

* Mém. de l'Ac. imp. d. sc., t. I (III), стр. 565.

ность которого он ограничивает во многих местах своего труда, вследствие чего большое число вопросов оказывается изъятым из этого принципа. Мы имеем в виду также одну геометрическую ошибку, которую признал сам автор. Среди других неправильностей приведем только еще одну, которую он допустил, говоря о силе инерции. Вот что он говорит.*

«Представим себе, что тело помещено на горизонтальной плоскости и что никакое трение его на ней не удерживает. Если я пожелаю, чтобы оно скользило по этой плоскости, то мне придется все же, в силу инерции материи, приложить некоторое усилие; если присоединить к этому телу второе, потом третье и т. д., то мне придется, чтобы вызвать это движение, прикладывать все бóльшую силу. В каждом случае у меня будет ощущение усилия, которое я должен буду сделать; но я не должен из этого заключать, что материя оказывает какое-либо сопротивление этому усилию и что в телах существует то, что весьма неудачно называется *силой инерции*. Выражаясь таким образом, мы смешиваем ощущение, нами испытываемое и зависящее от сделанного нами усилия, с ощущением сопротивления, на самом деле не существующего.

«Когда тело испытывает трение о плоскость, то и на самом деле имеет место сопротивление горизонтальному движению, и я не могу переместить тело по плоскости, не употребив усилия, превышающего это сопротивление. Точно так же, когда я хочу поднять тело вертикально, имеет место также сопротивление этому движению, которое я должен преодолеть усилием, его превышающим. В обоих случаях я не вызову никакого движения, пока не сделаю усилия, большего чем вес тела или чем его трение о горизонтальную плоскость; но если предположить, что нет ни тяготения, ни трения, то я приведу тело в движение, как бы слабо ни было сделанное мною усилие и как бы ни была велика масса тела. Теперь, если я ощущаю, что требуется бóльшее уси-

* Traité de méchanique, t. I, стр. 221, № 120.

лие для сообщения того же движения одному телу или другому, то я заключу из этого, что первое содержит большее количество материи, чем второе; и если бы я смог точно сравнить величины усилий, затраченных мною в том и другом случае, то их отношение было бы равно отношению масс двух тел».

Возражение знаменитого автора против силы инерции основано на том, что тело, как бы массивно оно ни было, может быть смещено самым легким усилием. Но из этого следует только, что сила инерции для какого угодно тела может быть произвольно малой, что и верно на самом деле, ибо эта сила пропорциональна массе тела и величине перемещения, которое оно претерпело за момент dt, если оно было в покое, или величине, на которую изменилось его движение также за этот момент, если оно уже находилось в движении. Таким образом, для одного и того же тела сила инерции может приобретать все значения от нуля до любой сколь угодно большой величины.

Может быть, будет нелишним заметить, что если бы не допускать наличия силы инерции, было бы невозможно объяснить, почему для смещения одного тела необходимо сделать большее усилие, чем то, которое сообщило бы то же смещение другому телу. Скажут, что первое тело содержит больше материи, чем второе; но если бы материя не оказывала движению никакого противодействия, так не все ли равно, много ее или мало?

Но поскольку материя противодействует усилиям, направленным к ее перемещению, ясно, что чем больше материи, тем более энергичное усилие требовалось бы, чтобы произвести одно и то же перемещение. Верно, что очень малое усилие может сместить весьма большую массу, но тогда оно ее сместит несравненно меньше, чем малую массу; ибо последняя представит такое же сопротивление гораздо большему перемещению, как вторая — значительно более слабому.

Мы не считаем необходимым анализировать более подробно мнение Пуассона о силе инерции, ибо этот знаменитый математик, отвергнув ее, посвящает целую главу рассмотрению центро-

бежной силы. А* эта сила есть нормальная составляющая силы инерции или, если угодно, ее проекция на направление радиуса кривизны.

Мы пользовались термином *сила инерции*, потому что он вошел в употребление, но мы не высказываемся по вопросу о том, удачно или неудачно он применяется.

* Том первый, глава IV книги второй, стр. 318, № 169.

О ВАРИАЦИЯХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Мы ставим себе целью изложить упрощения, которые могут быть внесены в знаменитый труд Пуассона о вариациях произвольных постоянных, напечатанный в «Journal de l'ecole Polytechnique». * Эти упрощения не представляют никакой трудности, если исходить из той формы, какую г-н Гамильтон дал общим уравнениям динамики; ** поэтому мы не придаем особого значения тому, что указали на них. Обращаемся к сущности дела.

I. Рассмотрим систему масс m_1, m_2, $m_3 \ldots$, которые считаем точками, связанными между собой каким-либо образом и находящимися под действием заданных сил. Обозначим через x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ координаты или какие-либо переменные, которыми определяется положение этих масс в конце промежутка времени t, истекшего от момента, принятого за начало времени. Обозначим также для конца того же промежутка времени t через v_1, v_2, $v_3, \ldots$ скорости масс m_1, m_2, $m_3, \ldots$ и положим

$$2T = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + \ldots$$

Величина T представляет собой то, что одни называют живой силой системы, другие — половиной живой силы. Можно ее рассматривать как функцию переменных x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n и их производных x_1', x_2', x_3', $\ldots$, x_n' по времени. По отношению

* Выпуск пятнадцатый, т. VIII, стр. 266 и след.

** Эта работа Гамильтона известна нам лишь на основании того, что о ней говорит знаменитый г-н Якоби.

к этим последним переменным T будет однородной функцией второго измерения.

Установив это, получим, по Лагранжу, момент сил инерции системы для любого возможного или невозможного перемещения в виде

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dT}{dx_i}-\frac{d\frac{dT}{dx'_i}}{dt}\right)\delta x_i\,;$$

знак $\sum$ относится к значку i, а характеристика δ обозначает вполне произвольную вариацию переменной x_i.

Положим, согласно Пуассону,

$$\frac{dT}{dx'_1}=p_1,\quad \frac{dT}{dx'_2}=p_2,\ \ldots,\quad \frac{dT}{dx'_n}=p_n\,;$$

выражение для момента сил инерции обратится в

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dT}{dx_i}-p'_i\right)\delta x_i\,,$$

где p'_i — производная $\frac{dp_i}{dt}$.

Но, поскольку T — однородная функция второго измерения относительно производных x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, величины p будут линейными функциями тех же производных, а стало быть, и обратно, можно будет рассматривать эти последние как линейные функции величин p; следовательно, T будет однородной функцией второго измерения от p_1, p_2, p_3, ..., p_n. Однако следует заметить, что, вводя p_1, p_2, p_3, ..., p_n вместо производных x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, мы в то же время вводим и переменные x_1, x_2, x_3, ..., x_n, так что величина T будет уже иной функцией, чем та, которой она была до введения p_1, p_2, p_3, ..., p_n вместо x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n.

Рассматривая T как функцию p_1, p_2, p_3, ..., p_n и x_1, x_2, x_3, ..., x_n, мы будем обозначать производные, относящиеся к последним величинам, соответственно через

$$\left(\frac{dT}{dx_1}\right), \quad \left(\frac{dT}{dx_2}\right), \quad \left(\frac{dT}{dx_3}\right), \ldots, \left(\frac{dT}{dx_n}\right),$$

чтобы отличить от производных

$$\frac{dT}{dx_1}, \quad \frac{dT}{dx_2}, \quad \frac{dT}{dx_3}, \ldots, \frac{dT}{dx_n},$$

относящихся к предположению, что T есть функция от x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, x_1, x_2, x_3, ..., x_n.

Дифференцируя величину T сначала в предположении, что она есть функция от x_1, x_2, x_3, ... x_n, x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, а затем в предположении, что она есть функция от x_1, x_2, x_3, ..., x_n, p_1, p_2, p_3, ..., p_n, получим

$$\delta T = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT}{dx_i}\delta x_i + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT}{dx'_i}\delta x'_i,$$

$$\delta T = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{dT}{dx_i}\right)\delta x_i + \frac{dT}{dp_i}\delta p_i\right];$$

поэтому, заменяя $\frac{dT}{dx'_i}$ через p_i и складывая,

$$2\delta T = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{\left[\frac{dT}{dx_i} + \left(\frac{dT}{dx_i}\right)\right]\delta x_i + \frac{dT}{dp_i}\delta p_i\right\} + \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta x'_i.$$

С другой стороны, поскольку T — однородная функция второго измерения относительно x'_1, x'_2, x'_3, ..., x'_n, мы, в силу свойств однородных функций и вследствие $\frac{dT}{dx'_i} = p_i$, получим

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x'_i,$$

следовательно,

$$2\delta T = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i \delta p_i + \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta x'_i .$$

Сравнивая эти два выражения для $2\delta T$ и сокращая член $\sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta x'_i$, общий им обоим, имеем

$$\sum_{i=1}^{i=n} x'_i \delta p_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left[\frac{dT}{dx_i} + \left(\frac{dT}{dx_i}\right) \right] \delta x_i + \frac{dT}{dp_i} \delta p_i \right\}. \qquad (1)$$

Так как вариации δx_i и δp_i можно рассматривать как совершенно произвольные, то из предыдущего уравнения следует, что

$$\frac{dT}{dx_i} = -\left(\frac{dT}{dx_i}\right),$$

$$x'_i = \frac{dT}{dp_i}.$$

Но для наших целей нет необходимости останавливаться на этих равенствах, правда довольно замечательных; мы удовлетворимся тем, что поскольку

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{dT}{dx_i}\right) \delta x_i + \frac{dT}{dp_i} \delta p_i \right] = \delta T,$$

то уравнение (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT}{dx_i} \delta x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i \delta p_i - \delta T$$

Подставляя найденное значение $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dT}{dx_i} \delta x_i$ в выражение момента сил инерции, получим для него

$$\sum_{i=1}^{i=n} (x'_i \delta p_i - p'_i \delta x_i) - \delta T;$$

в этой форме и следует рассматривать упомянутый момент.

II. Мы пришли к предыдущему выражению, заменив в значении момента

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dT}{dx_i}\delta x_i - p'_i\delta x_i\right)$$

сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dT}{dx_i}\delta x_i$$

через $\sum_{i=1}^{i=n} x'_i\delta p_i - \delta T$.

Однако мы могли бы прийти к равенству

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dT}{dx_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i\delta p_i - \delta T$$

несколько более простым путем. Действительно, имеем

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dT}{dx_i}\delta x_i = \delta T - \sum_{i=1}^{i=n}\frac{dT}{dx'_i}\delta x'_i = \delta T - \sum_{i=1}^{i=n} p_i\delta x'_i = \delta T +$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=n} x'_i\delta p_i - \delta\sum_{i=1}^{i=n} p_i x'_i .$$

Но

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i x'_i = 2T;$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{dT}{dx_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x'_i\delta p_i - \delta T .$$

Хотя величина T будет теперь рассматриваться как функция x_1, x_2, x_3, ..., x_n и p_1, p_2, p_3, ..., p_n, тем не менее мы не будем более окружать скобками производные этой величины по x; ибо

нам не придется больше иметь дело с производными по тем же переменным, но относящимся к величине T, которая образована иным способом.

Если мы прибавим к моменту сил инерции момент движущих сил, то получим момент потерянных сил. Таким образом, если мы обозначим через δV момент движущих сил, то момент потерянных сил будет

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x'_i\delta p_i - p'_i\delta x_i) - \delta T + \delta V.$$

В предыдущем выражении δT есть полная вариация, но δV могла бы и не быть полной вариацией. В силу свойств момента, δV должно иметь форму

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i\delta x_i\,,$$

т. е. должно быть линейной функцией произвольных вариаций δx_1, δx_2, δx_3, ..., δx_n и не содержать ни одной из вариаций δp_1, δp_2, δp_3, ..., δp_n. Что касается коэффициентов X, то они могут удовлетворять, а могут и не удовлетворять условиям интегрируемости. Заметим, однако, что хотя нет ни одного вопроса динамики, который приводил бы к такому предположению, но ничто не мешает допустить, что δV имеет вид

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + P_i\delta p_i)\,.$$

Теория вариаций произвольных постоянных будет иметь место по отношению к дифференциальным уравнениям, которые будут следовать из этого допущения. Но если, с одной стороны, эта теория более общая, чем того требует динамика, то, с другой стороны, как мы увидим позднее, она не будет охватывать всех вопросов этой науки; будут такие, которые останутся вне ее пределов.

III. Чтобы получить уравнения движения, нужно только прибавить к выражению

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i\delta p - p_i'\delta x_i) - \delta T + \delta V$$

момент сил, заменяющих условия возможных перемещений [1], и приравнять нулю результат. Далее, поскольку в этих результатах вариации $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \ldots, \delta x_n$, $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3, \ldots, \delta p_n$ будут совершенно произвольными, мы приравняем нулю их коэффициенты, и это даст нам столько уравнений, сколько необходимо для того, чтобы, комбинируя их с уравнениями, вытекающими из условий для возможных перемещений, мы могли получить все неизвестные нашей задачи.

Однако излагаемая нами теория заставляет нас идти по иному пути. Будем предполагать вместе с Пуассоном, что мы выразили переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ в функции других переменных, независимых друг от друга, и что мы подставили эти функции в момент живых сил вместо $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Эта подстановка выполняется путем введения новых переменных в величину T. Частные производные от этой величины по новым переменным заменяют величины p. Мы затем введем те же переменные в момент δV движущих сил. Предположим, что после этого введения δV стала полной вариацией; это может иметь место, если даже она и не была полной вариацией сначала, т. е. до этого введения [2]. Если ограничиваться вопросами динамики, то δV не будет содержать вариаций δp; поэтому нужно также предположить, что она не будет содержать и величин p; иначе δV не сможет быть полной вариацией относительно новых переменных, каковы бы ни были эти последние.

Момент потерянных сил выразится через новые переменные и через величины, которые будут заменять величины p, совершенно так же, как он выражается через x и p, с той разницей, что число n будет меньше на столько единиц, сколько имелось условий для возможных перемещений. Но мы сохраним буквы x,

p, n для обозначения новых переменных и их числа; мы предположим, что эти буквы изменили свои значения. В этом случае выражение момента потерянных сил будет по-прежнему

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i'\delta p_i - p_i'\delta x_i) - \delta T + \delta V,$$

или, так как по предположению δV — полная вариация, то, полагая, что $T - V = U$, получим для этого момента выражение

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i'\delta p_i - p_i'\delta x_i) - \delta U.$$

Получаемый момент не будет любым моментом, ибо поскольку он выражен через переменные, свободные от какой-либо зависимости между собой, он стал моментом виртуальным, или возможным, и, следовательно, его значение должно быть равно нулю, так как потерянные силы находятся в равновесии.

Мы будем, таким образом, иметь

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i'\delta p_i - p_i'\delta x_i) = \delta U,$$

или, поскольку разности, обозначенные через δ, совершенно произвольны, отсюда будет следовать, при любом i,

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \frac{dU}{dp_i}, \\ p_i' &= \frac{dU}{dx_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В вопросах динамики величина U есть рациональная и целая функция второй степени от величин p. Но теория произвольных постоянных будет иметь место для только что написанных дифференциальных уравнений, каков бы ни был состав U по отношению к величинам $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. В этом случае упомянутая теория даст более, чем того требует динамика; но, с другой стороны, требуя, чтобы δU, или вернее δV, была полной

вариацией и чтобы условия, связывающие возможные перемещения, были заданы интегрируемыми уравнениями, она не охватывает всех задач динамики, ибо среди этих задач есть такие, в которых δV не является полной вариацией, а есть и такие, в которых условия, связывающие возможные перемещения, даются в виде дифференциальных уравнений или неравенств, не интегрируемых непосредственно.

IV. Положим, что

$$a = \varphi(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \quad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

представляет интеграл дифференциальных уравнений (2), причем a обозначает величину, не зависящую от t. Дифференцируя этот интеграл по t и по всему тому, что изменяется вместе с t, получим результат

$$0 = \frac{d\varphi}{dt} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\varphi}{dx_i} x'_i + \frac{d\varphi}{dp_i} p'_i \right),$$

который, в силу свойств интеграла, обратится в тождество, если в нем заменить x'_i и p'_i их значениями (2). Итак, после этой подстановки можно будет непосредственно продифференцировать наш результат по x_k и p_k при любом значке k. Дифференцирование по x_k дает

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt dx_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_k} x'_i + \frac{d^2\varphi}{dx_k dp_i} p'_i \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\varphi}{dx_i} \cdot \frac{dx'_i}{dx_k} + \frac{d\varphi}{dp_i} \cdot \frac{dp'_i}{dx_k} \right)$$

или, вследствие того, что

$$\frac{d^2\varphi}{dt dx_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d^2\varphi}{dx_i dx_k} x'_i + \frac{d^2\varphi}{dx_k dp_i} p'_i \right) = \frac{d \frac{d\varphi}{dx_k}}{dt},$$

$$\frac{dx'_i}{dx_k} = \frac{d^2 U}{dx_k dp_i},$$

$$\frac{dp'_i}{dx_k} = - \frac{d^2 U}{dx_i dx_k},$$

получим

$$\frac{d\,\dfrac{d\varphi}{dx_k}}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i dx_k}-\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_k dp_i}\right).$$

Производная $\dfrac{d\,\dfrac{d\varphi}{dx_k}}{dt}$ относится ко всему, что изменяется вместе с t.

Таким же образом найдем

$$\frac{d\,\dfrac{d\varphi}{dp_k}}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dp_k}-\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dp_i\,dp_k}\right).$$

Предположим, что

$$b=\psi\,(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_n)$$

есть другой интеграл тех же дифференциальных уравнений (2), причем b, как и a, величина, не зависящая от t. Заменяя φ через ψ, получим

$$\frac{d\,\dfrac{d\psi}{dx_k}}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}-\frac{d\psi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}\right),$$

$$\frac{d\,\dfrac{d\psi}{dp_k}}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\psi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dp_k}-\frac{d\psi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dp_i\,dp_k}\right).$$

Если умножить производную $\dfrac{d\,\dfrac{d\varphi}{dx_k}}{dt}$ на $\dfrac{d\psi}{dp_k}$ и вычесть из этого произведения $\dfrac{d\,\dfrac{d\varphi}{dp_k}}{dt}$, умноженное на $\dfrac{d\psi}{dx_k}$, то получим

$$\frac{d\psi}{dp_k}\,d\,\frac{d\varphi}{dx_k}-\frac{d\psi}{dx_k}\,d\,\frac{d\varphi}{dp_k}=dt\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dx_k}-\right.$$

$$-\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}\cdot\frac{d^2U}{dx_k\,dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}:\frac{d\psi}{dx_k}\cdot\frac{d^2U}{dx_i\,dp_k}+$$

$$\left.+\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\cdot\frac{d^2U}{dp_i\,dp_k}\right).$$

Точно так же получим, умножив производную $\dfrac{d\dfrac{d\psi}{dx_k}}{dt}$ на $\dfrac{d\varphi}{dp_k}$ и вычитая отсюда $\dfrac{d\dfrac{d\psi}{dp_k}}{dt}$, умноженное на $\dfrac{d\varphi}{dx_k}$,

$$\frac{d\varphi}{dp_k}\, d\,\frac{d\psi}{dx_k} - \frac{d\varphi}{dx_k}\, d\,\frac{d\psi}{dp_k} = dt \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i dx_k} - \right.$$

$$\left. - \frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_k dp_i} - \frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_i}\cdot\frac{d^2U}{dx_i dp_k} + \frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_i}\cdot\frac{d^2U}{dp_i dp_k}\right).$$

Вычитая эти результаты один из другого, найдем

$$d\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right) = dt \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\psi}{dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_i}\right)\frac{d^2U}{dx_i dx_k} + \right.$$

$$+ \left(\frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_i} - \frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}\right)\frac{d^2U}{dx_k dp_i} + \left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right)\frac{d^2U}{dx_i dp_k} +$$

$$\left. + \left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\psi}{dx_k} - \frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_i}\right)\frac{d^2U}{dp_i dp_k}\right]. \qquad (2a)$$

Обозначим величину, стоящую под знаком Σ, через $Q_{i,k}$, так что будем иметь

$$d\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right) = dt \sum_{i=k}^{i=n} Q_{i,k}.$$

Суммируя по значку k от $k=1$ до $k=n$, получим

$$d\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k} - \frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right) = dt \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{i,k}.$$

Но легко убедиться, что при перестановке значков i и k величина $Q_{i,k}$ только меняет знак [3], так что

$$Q_{i,k} + Q_{k,i} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{i,k} + \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{k,i} = 0.$$

С другой стороны, ясно, что

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{i,k}=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{k,i};$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} Q_{i,k}=0$$

и, следовательно,

$$d\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}-\frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right)=0,$$

где дифференциал относится ко всем величинам, которые изменяются с изменением времени; интегрирование дает

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}-\frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right)=C; \tag{3}$$

C — величина, независимая от времени, а в остальном произвольная.

Формула (3) выражает знаменитую теорему Пуассона. Из нее следует, что каждая пара интегралов

$$a=\varphi,\ b=\psi$$

дает непосредственно, т. е. без какого-либо интегрирования, третий интеграл, который есть не что иное, как сама формула (3). Из нее следует также, что левая часть этой формулы не зависит от времени. При этом, если мы найдем все интегралы уравнений (2), определим из них все x и все p в функции времени и произвольных постоянных и подставим их значения в выражение

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\cdot\frac{d\psi}{dp_k}-\frac{d\varphi}{dp_k}\cdot\frac{d\psi}{dx_k}\right),$$

то время само собой исчезнет из этого выражения при любых интегралах φ и ψ, и останутся лишь произвольные постоянные a, b, c, ..., введенные интегрированием.

V. Предположим теперь, что дифференциальные уравнения, подлежащие интегрированию, получены уже не из формулы

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i'\delta p_i - p_i'\delta x_i) = \delta V[^4],$$

а из формулы

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i'\delta p_i - p_i'\delta x_i) = \delta V + \sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i + P_i\delta p_i),$$

где величины V, X_i и P_i представляют какие-либо конечные функции величин x и p.

В этом случае дифференциальные уравнения (2) должны быть заменены следующими:

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \frac{dV}{dp_i} + P_i, \\ p_i' &= -\frac{dV}{dx_i} - X_i, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

которые будут иметь место для всех целых значений i от 1 до n.

Можно допустить, что интегралы этих последних уравнений выражаются теми же формулами, что и для уравнений (2), с той лишь разницей, что теперь произвольные постоянные a, b, c, ... будут переменными, т. е. будут заключать время t. Нужно определить эти новые переменные. Обозначим для удобства величины a, b, c, ... и функции φ, ψ, ... соответственно через a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}, φ_1, φ_2, ..., φ_{2n}. Тогда формулы

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \varphi_1(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n), \\ a_2 &= \varphi_2(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{2n} &= \varphi_{2n}(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

будут одновременно представлять и интегралы уравнений (2), и интегралы уравнений (4). Они будут интегралами уравнений (2), если рассматривать величины a как постоянные, и уравнений (4), если рассматривать эти же величины как переменные [[5]].

Возьмем любой из этих интегралов

$$a = \varphi(t, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n).$$

Опускаем для простоты значки при буквах a и φ, подразумевая, что эти буквы имеют какой-либо одинаковый значок в пределах от 1 до $2n$. Дифференцируя этот интеграл в предположении переменного a, чтобы он относился к уравнениям (4), получим

$$\frac{da}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}x'_i+\frac{d\varphi}{dp_i}p'_i\right),$$

или, заменяя x'_i и p'_i их значениями из уравнений (4),

$$\frac{da}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{dV}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{dV}{dx_i}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}P_i-\frac{d\varphi}{dp_i}X_i\right);$$

но, в силу свойств функции φ, имеем тождественно

$$\frac{d\varphi}{dt}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{dV}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{dV}{dx_i}\right)=0;$$

следовательно,

$$\frac{da}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}P_i-\frac{d\varphi}{dp_i}X_i\right).$$

Придавая буквам a и φ все значки 1, 2, 3, ..., $2n$, получим все уравнения, которым должны удовлетворять новые переменные a и которые послужат для определения всех этих переменных. Но удобнее представить правые части этих уравнений в другом виде. Поскольку, в силу уравнений (5), все x и p являются функциями a, имеем

$$\delta x_i=\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{dx_i}{da_k}\delta a_k,\quad \delta p_i=\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{dp_i}{da_k}\delta a_k,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i+P_i\delta p_i)=\sum_{k=1}^{k=2n}\delta a_k\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{dx_i}{da_k}+P_i\frac{dp_i}{da_k}\right),$$

или, полагая для краткости

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{dx_i}{da_k}+P_i\frac{dp_i}{da_k}\right)=A_k, \tag{6}$$

получим

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i+P_i\delta p_i)=\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\delta a_k;$$

но a_k — функция φ_k от x и p, следовательно,

$$\delta a_k=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi_k}{dx_i}\delta x_i+\frac{d\varphi_k}{dp_i}\delta p_i\right),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i+P_i\delta p_i)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\delta x_i\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\frac{d\varphi_k}{dx_i}+\delta p_i\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\frac{d\varphi_k}{dp_i}\right),$$

причем это уравнение имеет место при любых вариациях δ. Отсюда следует, что

$$X_i=\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\frac{d\varphi_k}{dx_i},\quad P_i=\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\frac{d\varphi_k}{dp_i}.$$

Если подставим эти значения в уравнение

$$\frac{da}{dt}=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}P_i-\frac{d\varphi}{dp_i}X_i\right),$$

то оно обратится в

$$\frac{da}{dt}=\sum_{k=1}^{k=2n}A_k\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right).$$

Но мы видели, что выражение

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)$$

не зависит от времени; поэтому, если мы заменим величины x и p, которые в нем заключаются, их значениями, выраженными

через t и величины a, взятые из уравнений (5), то переменная t исключается сама собой, так что это выражение будет содержать только величины a.

Положим для сокращения

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)=(\varphi,\ \varphi_k);$$

тогда получим:

$$\frac{da}{dt}=\sum_{k=1}^{k=2n}(\varphi,\ \varphi_k)\,A_k.$$

Придавая φ и величине a все значки 1, 2, 3, ..., $2n$, получим столько же уравнений, сколько неизвестных переменных a. Эти уравнения, имеющие вид

$$\frac{da_m}{dt}=\sum_{k=1}^{k=2n}(\varphi_m,\ \varphi_k)\,A_k,$$

обладают тем замечательным свойством, что коэффициенты

$$(\varphi_m,\ \varphi_k)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\varphi_m}{dx_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_i}-\frac{d\varphi_m}{dp_i}\cdot\frac{d\varphi_k}{dx_i}\right)$$

будут заключать только переменные a без времени t.

Что касается функций A_k или

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(X_i\frac{dx_i}{da_k}+P_i\frac{dp_i}{da_k}\right),$$

то они также будут являться функциями величин a, после того как мы исключим из них все x и p; но они могут содержать время t явным образом.

Если сумма

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i\delta x_i+P_i\delta p_i)$$

есть полный дифференциал некоторой конечной функции Ω, так что

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + P_i \delta p_i) = \delta\Omega,$$

то, очевидно, будем иметь

$$A_k = \frac{d\Omega}{da_k},$$

и в этом частном случае дифференциальные уравнения между переменными a будут иметь вид

$$\frac{da_m}{dt} = \sum_{k=1}^{k=2n} (\varphi_m, \varphi_k) \frac{d\Omega}{da_k}.$$

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

I. Уравнения движения устанавливаются на основании геометрического определения рассматриваемой системы и общего, чисто динамического принципа моментов.

Система считается определенной, когда известны все ее виртуальные, или возможные, перемещения, т. е. все те, которые система может принимать в каждый момент. Если мы знаем эти перемещения, мы будем знать и все другие, а именно те, которых система принять не может, потому что они несовместимы с ее природой или потому что внешние препятствия им противодействуют. Эти последние перемещения называются невозможными; присоединив их к виртуальным перемещениям, получим все мгновенные перемещения, которые можно себе представить в отношении системы.

Мгновенные виртуальные перемещения отличаются от мгновенных невозможных перемещений теми условиями, которым удовлетворяют первые, но не удовлетворяют вторые. Эти условия — соотношения, уравнения или неравенства, линейные относительно проекций виртуальных перемещений на некоторые направления, которые заданы в каждом данном случае, но которые нельзя было бы определить в общем случае для любой системы. Всякое перемещение, удовлетворяющее этим уравнениям или неравенствам, является виртуальным; напротив, то, которое им не удовлетворяет, невозможно. А так как задание виртуальных перемещений, а следовательно, и невозможных перемещений, влечет за собой, как только что сказано, геометрическое определение

системы, то говорят, что она задана или определена теми же соотношениями, при помощи которых виртуальные перемещения различаются от невозможных.

Положим для определенности, что мы приравняли нулю правые части этих соотношений, т. е. упомянутых уравнений или неравенств; их левые части будут функциями *координат системы*, времени и их дифференциалов или вариаций первого порядка. Последние — дифференциалы или производные — будут заменять перемещения точек системы и, подобно этим перемещениям, будут входить в эти функции только линейным образом. Таким образом, обозначив через

$$t,\ x,\ y,\ z$$

время и какие-либо координаты, определяющие в каждый момент положение системы, получим для ее геометрического определения некоторое число выражений вида

$$T dt + A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \ldots, \qquad (1)$$

причем некоторые из них будут равны нулю, некоторые больше нуля, некоторые, наконец, меньше нуля; но ни в одном не будет исключено равенство нулю, и ни одно не сможет быть то больше, то меньше нуля. Всякое выражение, не удовлетворяющее последнему условию, могло бы принимать положительные и отрицательные значения и ничем не связывало бы систему.

Величины

$$T,\ A,\ B,\ C$$

являются в каждом отдельном случае известными функциями времени и координат, а вариации

$$dt,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \ldots$$

представляют: первая — элемент времени, а остальные — дифференциалы первого порядка от координат, относящиеся к любому мгновенному перемещению, какое только можно себе представить для данной системы. Как и перемещения, которым они соответствуют, упомянутые дифференциалы ограничены лишь крайней

малостью своей величины, порядка dt; в остальном они совершенно произвольны. Если они удовлетворяют определению системы, то они относятся к виртуальным перемещениям, в противном случае — к невозможным перемещениям.

Для большего единообразия и определенности удобнее изменить в определении системы знак каждой из формул, способной принимать отрицательные значения; например, если бы мы имели

$$Tdt + A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \ldots < 0, \tag{1}$$

то написали бы

$$-Tdt - A\Delta x - B\Delta y - C\Delta z - \ldots > 0.$$

Подобная замена ничем не изменяет свойства системы и, очевидно, вполне допустима. Таким образом, система будет определена лишь такими уравнениями и неравенствами, у которых правая часть положительна. Пусть для сокращения

$$\Delta L > 0, \ \Delta M > 0, \ \Delta N > 0, \ \ldots \tag{2}$$

— формулы, относящиеся к этому определению, причем некоторые из них могут быть уравнениями, и ни одно не исключает равенства. Дифференциалы

$$\Delta L, \ \Delta M, \ \Delta N, \ \ldots$$

представляют выражения, подобные тем, которые отмечены значком (1).

Действительное перемещение системы заключено, конечно, среди возможных перемещений и, следовательно, должно удовлетворять условиям (2); поэтому, обозначая через

$$dx, \ dy, \ dz, \ \ldots$$

дифференциалы координат $x, y, z, \ldots$ по времени и заменяя характеристику вариаций Δ дифференциальной характеристикой d, получим неравенства

$$dL > 0, \ dM > 0, \ dN > 0, \ \ldots,$$

которые не только могут быть уравнениями, но и необходимо будут ими согласно доказательству, приведенному в другом месте.*

Действительно, мы доказали там, что всякое неравенство, заключенное среди неравенств (2) и не обращающееся в уравнение при переходе от виртуальных перемещений к действительному, может быть опущено, как не связывающее систему, или, вернее, как относящееся к связям, которые ничем не стесняют движение. Поэтому систему можно освободить от таких связей и тем самым от выражающих их условий. С этими условиями дело будет обстоять так же, как с линейными функциями дифференциалов

$$dt,\ dx,\ dy,\ dz,\ \ldots,$$

функциями, внутренне связанными с задачей и принимающими положительные значения; они, конечно, остались бы положительными в течение некоторого промежутка времени, но рассмотрение их не имело бы никакого отношения к вопросу.

Таким образом, уравнения движения, вытекающие из определения системы, будут одни и те же, независимо от того, будет ли это определение выражаться только уравнениями, или будет зависеть также и от неравенств. Разница состоит лишь в том, что во втором случае некоторые из уравнений движения могут исчезнуть или последовательно друг за другом, или одновременно, или же могут вновь появиться по прошествии некоторого промежутка времени. Если мы будем рассматривать систему лишь в течение того промежутка времени, за который ни одно уравнение не появляется и не исчезает, то мы будем иметь для всего этого промежутка

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots \tag{3}$$

Продолжительность этого промежутка будет продолжительностью всего движения, если система задана только уравнениями;

* См. «О перемещениях систем, подчиненных переменным условиям» (Mém. de l'Acad. de sc., t. II, стр. 989).

но дело будет обстоять иначе, если в определение системы входят и неравенства. В этом случае в различные моменты некоторые из уравнений (3) могут исчезнуть, другие могут появиться и связать системы, и тогда мы будем иметь дело с промежутком времени, заключенным между двумя такими последовательными моментами. В течение этого промежутка определение системы даст те же уравнения

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots,$$

как и в случае, если бы она не содержала неравенств.

II. Уравнений (3) вообще недостаточно для определения системы; недостающие можно найти на основании принципа моментов. Но рассмотрим сначала два случая, которые при этом могут иметь место. Или все левые части уравнений (3) — каждое в отдельности или при посредстве других — будут полными дифференциалами, или же среди них найдутся такие, которые не будут удовлетворять условиям интегрируемости, какие бы комбинации мы из них ни составляли. В дальнейшем мы будем рассматривать только наиболее простой случай, т. е. первый. Это равносильно предположению, что величины

$$L,\ M,\ N,\ \ldots$$

или некоторые их комбинации, число которых равно числу самих величин, будут конечными функциями времени t и координат x, y, z. Таким образом, в силу свойств системы и внешних препятствий, будут существовать функции, которые мы по-прежнему будем обозначать через

$$L,\ M,\ N,\ \ldots$$

и которые, удовлетворяя уравнениям

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots,$$

не будут изменяться в зависимости от времени. Обозначим через A, B, C, ... их значения, соответствующие некоторому данному

моменту в рассматриваемом нами промежутке времени, для которого имеют место все уравнения (3). Тогда получится

$$L = A,\ M = B,\ N = C,\ \ldots$$

Если, следовательно, мы обозначим разности

$$L - A,\ M - B,\ N - C,\ \ldots$$

соответственно через

$$L,\ M,\ N,\ \ldots,$$

то эти новые величины L, M, N, ... приведут к уравнениям

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots$$

и к уравнениям

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ \ldots \tag{4}$$

Поскольку величины L, M, N, ... являются функциями переменных t, x, y, z, ..., полученные уравнения установят связь между этими переменными и послужат для нахождения некоторых из этих переменных как функций остальных и времени. Но для большего удобства и для симметрии лучше ввести другие переменные

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,$$

являющиеся функциями t, x, y, z, ... и выбранные соответствующим образом в каждом частном случае и в достаточном числе так, чтобы с помощью уравнений

$$f_1(t, x, y, z, \ldots) = \xi_1,\ f_2(t, x, y, z, \ldots) = \xi_2,\ f_3(t, x, y, z, \ldots) = \xi_3,\ \ldots,$$
$$\varphi(t, x, y, z, \ldots) = L,\ \Phi(t, x, y, z, \ldots) = M,\ \psi(t, x, y, z, \ldots) = N,\ \ldots$$

можно было определить все координаты x, y, z, ... в функции времени и величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... Упомянутые выше функции известны, а потому останется только определить величины ξ_1, ξ_2, ξ_3... Уравнения, необходимые для этого определения, получатся из рассмотрения моментов, но мы только укажем эти уравнения, отсылая для их доказательства к курсам динамики.

Мы будем пользоваться характеристикой δ для обозначения дифференциала или вариации, относящихся к изменениям величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, изменениям бесконечно малым, но в остальном произвольным, причем время будем предполагать неизменным. Таким образом, характеристика δ будет относиться ко всему тому, что так или иначе зависит от $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ Ее нужно строго отличать от характеристики Δ, которую мы применяли выше; эта последняя относится к совершенно произвольному положению системы, возможному или невозможному, и предполагает время переменным, тогда как δ относится только к переменным, удовлетворяющим определению системы, так что

$$\delta t = 0.$$

III. Обозначим через T половину живой силы системы, половину, которую часто называют и полной живой силой; пусть δU — виртуальный момент всех движущих сил, приложенных к системе. Выразим величину T и момент δU в функции переменных $t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ Первая из этих величин будет заключать наряду с этими переменными производные $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \ldots$, а вторая будет содержать вариации $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \delta\xi_3, \ldots$ в линейной форме.

Предположим, что после введения переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ момент движущих сил станет полной вариацией δU некоторой функции U от величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, которая может содержать также и время t. Эта гипотеза, конечно, не охватывает всех случаев систем и движущих сил, но она необходима; и если бы ее не было, то и теория, которую мы сейчас изложим, не имела бы места.

Итак, рассматриваемая нами система и приложенные к ней силы должны быть ограничены двумя условиями:

1) чтобы определение системы приводило бы к интегрируемым формулам;

2) чтобы виртуальный момент движущих сил, выраженный через величины, для которых определение системы не предполагает никаких взаимных связей, был бы полной вариацией относительно этих величин.

Установив это, будем иметь для движения системы известное уравнение

$$\sum\left(\frac{dT}{d\xi_i}-\frac{d\frac{dT}{d\xi_i'}}{dt}\right)\delta\xi_i+\delta U=0\,[^1],$$

или следующее:

$$\frac{d\sum\frac{dT}{d\xi_i'}\delta\xi_i}{dt}=\delta T+\delta U.$$

Знак $\sum$ относится к индексу i, который должен принимать столько значений 1, 2, 3, 4, ..., сколько имеется переменных ξ.

Полагая

$$T+U=V$$

и замечая, что производные ξ' не содержатся в U, получим

$$\frac{d\sum\frac{dV}{d\xi_i'}\delta\xi_i}{dt}=\delta V. \tag{5}$$

Вариации $\delta\xi'$ производных ξ' входят в это уравнение только по видимости; ибо члены, содержащие их, тождественно равны в обеих частях. Но дело обстоит иначе с вариациями $\delta\xi$; вследствие их абсолютной произвольности формула (3) разложится и даст столько же уравнений

$$\frac{d\frac{dV}{d\xi_i'}}{dt}=\frac{dV}{d\xi_i},$$

сколько значений имеет число i. Это — уравнения второго порядка, но нет ничего легче, как свести их к уравнениям первого порядка, удвоив их число. Среди большого количества таких преобразований наиболее простое и сразу приходящее в голову состоит в предположении, что

$$\frac{dV}{d\xi_i'}=p_i$$

для всех значений i, причем p_i представляет новую переменную; тогда имеем

$$p'_i = \frac{dV}{d\xi_i},$$

и уравнения

$$P'_i = \frac{d\xi_i}{dV}, \quad \frac{dV}{d\xi'_i} = p_i$$

будут, очевидно, первого порядка.

В силу природы функции V, или, вернее, функции T, частные производные

$$\frac{dV}{d\xi'_i}$$

будут заключать величины ξ'_1, ξ'_2, $\xi'_3, \ldots$ только в первой степени, и поэтому будет легко выразить их значения как функций от переменных ξ и p; затем, введя эти значения в производные

$$\frac{dV}{d\xi_i},$$

выразим также и величины p' через те же переменные ξ и p, так что будем иметь

$$\xi'_i = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots),$$

$$p'_i = F_i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots).$$

Вторые части этих уравнений могут принимать весьма замечательный вид, который мы и укажем.

Поскольку величина V представляет функцию второй степени от производных ξ', выделим в ней члены второго измерения, первого и нулевого и, таким образом, положим

$$V = V_0 + V_1 + V_2,$$

где V_0 вовсе не содержит производных ξ'_i; V_1 и V_2 являются их однородными функциями одного и двух измерений. Имеем

$$\frac{dV}{d\xi'_i} = p_i = \frac{dV_1}{d\xi'_i} + \frac{dV_2}{d\xi'_i},$$

откуда, умножив на ξ_i', взяв сумму Σ и учитывая свойство функций V_1 и V_2,

$$\sum p_i \xi_i' = V_1 + 2V_2,$$

или

$$\sum p_i \xi_i' = V + V_2 - V_0.$$

Следовательно, дифференцируя с характеристикой δ и заменяя $\frac{dV}{d\xi_i'}$ через p_i,

$$\sum (p_i \delta\xi_i' + \xi_i' \delta p_i) = \sum \left(p_i \delta\xi_i' + \frac{dV}{d\xi_i} \delta\xi_i\right) + \delta V_2 - \delta V_0,$$

т. е.

$$\sum \xi_i' \delta p_i = \sum \frac{dV}{d\xi_i} \delta\xi_i + \delta V_2 - \delta V_0.$$

Отсюда, полагая для сокращения

$$V_2 - V_0 = \theta, \tag{6}$$

имеем

$$\sum \xi_i' \delta p_i = \sum \frac{dV}{d\xi_i} \delta\xi_i + \delta\theta. \tag{7}$$

Рассматривая θ как функцию величин ξ и p и приравнивая коэффициенты при произвольных дифференциалах $\delta\xi$ и δp, получим

$$\left.\begin{aligned} \xi_i' &= \frac{d\theta}{dp_i}, \\ \frac{dV}{d\xi_i} + \frac{d\theta}{d\xi_i} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

т. е.

$$\xi_i' = \frac{d\theta}{dp_i}, \quad p_i' = -\frac{d\theta}{d\xi_i}. \tag{9}$$

IV. Заменим в уравнении (5) частную производную $\frac{dV}{d\xi_i'}$ ее значением p_i, затем умножим на dt и проинтегрируем от любого произвольного момента, например от $t=0$; тогда получим

$$\sum [p_i\delta\xi_i - (p_i\delta\xi_i)_0] = \delta\int_0^t V dt,$$

или, полагая

$$\int_0^t V dt = S, \tag{10}$$

будем иметь

$$\sum [p_i\delta\xi_i - (p_i\delta\xi_i)_0] = \delta S; \tag{11}$$

$(p_i\delta\xi_i)_0$ представляет значение $p_i\delta\xi_i$ для $t=0$.

Рассматривая S как функцию ξ и ξ_0, разложим последнее уравнение на следующие:

$$p_i = \frac{dS}{d\xi_i}, \quad (p_i)_0 = -\frac{dS}{d(\xi_i)_0},$$

которые будут интегралами дифференциальных уравнений движения.

Не останавливаясь на них, продифференцируем по t интегральное выражение S, заставляя в нем изменяться все то, что изменяется в зависимости от времени; тогда получим

$$\frac{dS}{dt} + \sum \frac{dS}{d\xi_k}\xi_k' = V, \tag{12}$$

где k может принимать те же значения, что и i. Заменим $\frac{dS}{d\xi_k}$ через p_k и, принимая во внимание, что

$$\sum p_k\xi_k' = 2V_2 + V_1,$$

$$V = V_2 + V_1 + V_0,$$

$$V_2 - V_0 = \theta,$$

будем иметь

$$\frac{dS}{dt}+\theta=0. \tag{13}$$

Если заменить величины p, входящие в θ, соответствующими значениями $\frac{dS}{d\xi}$, то уравнение (13) будет уравнением в частных производных. Независимыми переменными в нем будут t, ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$, и оно будет содержать только частные производные

$$\frac{dS}{dt}, \quad \frac{dS}{d\xi_1}, \quad \frac{dS}{d\xi_2}, \quad \frac{dS}{d\xi_3}, \ldots,$$

но не самую величину S. Мы заключаем отсюда, что если функция φ от t, ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$ удовлетворяет этому уравнению, то

$$\varphi=\mathrm{const}.$$

также будет ему удовлетворять, и, следовательно, если бы φ, удовлетворяя уравнению (13), содержало столько же произвольных постоянных, сколько имеется переменных ξ, то

$$S=\varphi+\mathrm{const}.$$

было бы интегралом полного решения уравнения (13).

Если бы мы знали подобную функцию φ, т. е. функцию, которая содержала бы столько произвольных постоянных

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ldots,$$

сколько имеется переменных ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$, и которая, будучи подставлена вместо S в уравнение (13), удовлетворяла бы этому уравнению, то следует предположить, что мы сразу нашли бы интегралы дифференциальных уравнений динамики

$$\xi_i'=\frac{d\theta}{dp_i}, \quad p_i'=-\frac{d\theta}{d\xi_i}. \tag{9}$$

Эти интегралы будут

$$p_i=\frac{d\varphi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha_i}=\beta_i, \tag{14}$$

где β_i — новая произвольная постоянная, а i — тот же переменный значок, что и ранее.

Для доказательства справедливости этого предположения заметим сначала, что предшествующие формулы содержат требуемое число произвольных постоянных, а именно столько же, сколько имеется дифференциальных уравнений; остается, стало быть, лишь убедиться, что эти же выражения удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9).

Дифференцируя по времени интегралы (14), найдем

$$p'_i = \frac{d^2\varphi}{dt d\xi_i} + \sum \frac{d^2 S}{d\xi_k d\xi_i} \xi'_k,$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt d\alpha_i} + \sum \frac{d^2\varphi}{d\xi_k d\alpha_i} \xi'_k.$$

Заменяя даже производные p_i и ξ'_i их значениями

$$-\frac{d\theta}{d\xi_i} \text{ и } \frac{d\theta}{dp_i},$$

полученными из дифференциальных уравнений (9), будем иметь

$$0 = \frac{d\theta}{d\xi_i} + \frac{d^2\varphi}{dt d\xi_i} \sum \frac{d^2\varphi}{d\xi_k d\xi_i} \cdot \frac{d\theta}{dp_k},$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt d\alpha_i} + \sum \frac{d^2\varphi}{d\xi_k d\alpha_i} \cdot \frac{d\theta}{dp_k}.$$

Так как при дифференцировании исчезли произвольные постоянные β, последние уравнения содержат только переменные ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots$, p_1, p_2, $p_3, \ldots$ и произвольные постоянные α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ Докажем, что эти уравнения станут тождествами, если величины p_1, p_2, $p_3, \ldots$, входящие в функцию θ, заменить при помощи формул (14) соответственными производными $\frac{d\varphi}{d\xi}$. Функция φ представляет решение уравнения (13), и потому мы будем иметь тождественно

$$\frac{d\varphi}{dt} + \theta = 0.$$

В выражении для функции θ, входящей в это уравнение, производные $\frac{d\varphi}{d\xi}$ заменяют производные $\frac{dS}{d\xi}$, содержащиеся в выражении для функции θ, входящей в уравнение (13). Эти последние производные заменяют, в свою очередь, величины p, содержащиеся в θ, даваемом выражением (6). Таким образом, θ, входящее в уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt}+\theta=0,$$

получается из θ, входящего в дифференциальные уравнения (9), путем подстановки вместо p величин $\frac{d\varphi}{d\xi}$. Чтобы не пользоваться при дифференцировании неудобным обозначением

$$\frac{d\theta}{d\frac{d\varphi}{d\xi}},$$

мы будем писать вместо него

$$\frac{d\theta}{dp},$$

но при условии заменить после дифференцирования величины p производными $\frac{d\varphi}{d\xi}$.

Продифференцируем уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\xi}+\theta=0$$

сначала по ξ_i, затем по α_i и обратим внимание на то, чтобы постоянная α_i входила в него лишь постольку, поскольку она содержится в производных

$$\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d\varphi}{d\xi_1},\quad \frac{d\varphi}{d\xi_2},\quad \frac{d\varphi}{d\xi_3},\ldots,$$

и чтобы переменная ξ_i не только входила в эти же производные но и заключалась явным образом в θ. Не забудем, что эти про-

изводные временно заменены величинами $p_1, p_2, p_3, \ldots$ Тогда получим

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt d\xi_i}+\sum\frac{d\theta}{dp_k}\cdot\frac{dp_k}{d\xi_i}+\frac{d\theta}{d\xi_i},$$

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt d\alpha_i}+\sum\frac{d\theta}{dp_k}\cdot\frac{dp_k}{d\alpha_i},$$

где k — переменный значок, принимающий те же значения, что и i. Эти уравнения, очевидно, станут тождествами, когда мы заменим в них величины p через $\frac{d\varphi}{d\xi}$. Предположив, что эта замена произведена также и в выражениях

$$\frac{d\theta}{dp_k} \text{ и } \frac{d\theta}{d\xi_i},$$

будем иметь тождественно

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt d\xi_i}+\sum\frac{d^2\varphi}{d\xi_k d\xi_i}\cdot\frac{d\theta}{dp_k}+\frac{d\theta}{d\xi_i},$$

$$0=\frac{d^2\varphi}{dt d\alpha_i}+\sum\frac{d^2\varphi}{d\xi_k d\alpha_i}\cdot\frac{d\theta}{dp_k};$$

следовательно, интегралы дифференциальных уравнений динамики

$$\xi'_i=\frac{d\theta}{dp_i}, \quad p'_i=-\frac{d\theta}{d\xi_i} \tag{9}$$

будут

$$p_i=\frac{d\varphi}{d\xi_i}, \quad \frac{d\varphi}{d\alpha_i}=\beta_i. \tag{14}$$

Из приведенного анализа можно усмотреть, что теории, установленные г-ном Гамильтоном и знаменитым математиком г-ном Якоби для систем, которые заданы уравнениями, не изменяющимися в зависимости от времени, распространяются и на системы, определенные как уравнениями, так и неравенствами, которые изменяются в каждый момент.

ПИСЬМА АКАДЕМИКА ОСТРОГРАДСКОГО ПРОФЕССОРУ БРАШМАНУ

Письмо 1-е

Мой милый, дорогой друг!

Из-за моего зрения я до сих пор не послал Вам своей статьи о принципе наименьшего действия, вот она.

Я беру уравнение движения в виде

$$\sum\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - m\,\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right) = 0.$$

Допустим, что выражение $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ есть полная вариация некоторой функции Π, т. е. что оно равно $\delta\Pi$; тогда

$$\delta\Pi = \sum m\left(\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right).$$

Но

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d\,(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - (dxd\delta x + dyd\delta y +$$

$$+ dzd\delta z) = d\,(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - \delta\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2} =$$

$$= d\,(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - v\delta v dt^2,$$

где v скорость точки m. Таким образом, уравнение движения будет

$$\delta\Pi + \sum mv\delta v = d\sum m\left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt^2}\right)$$

или

$$\delta\Pi + \delta \sum \frac{mv^2}{2} = d \sum m \left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt^2}\right),$$

или, наконец, обозначая через T живую силу системы, *

$$\delta(\Pi + T) = d \sum m \left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt^2}\right).$$

Я умножаю последнее уравнение на dt и интегрирую между двумя пределами, для которых x, y, z равны x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1; получаю

$$\delta \int (\Pi + T)\, dt = \sum m \left(\frac{dx_1\delta x_1 + dy_1\delta y_1 + dz_1\delta z_1}{dt}\right) -$$

$$- \sum m \left(\frac{dx_0\delta x_0 + dy_0\delta y_0 + dz_0\delta z_0}{dt}\right).$$

Поэтому, если ограничить, следуя Лагранжу, общий характер вариаций, отнеся их к кривым, которые все начинаются в точках x_0, y_0, z_0, а заканчиваются в точках x_1, y_1, z_1, то будем иметь $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0$, $\delta z_0 = 0$, $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0$ и, следовательно,

$$\delta \int (\Pi + T)\, dt = 0;$$

иными словами, $\int (\Pi + T)\, dt$ представляет minimum. Согласно Лагранжу, минимальным является интеграл $\int T dt$; но его анализ неправилен.

Я не знаю, ясно ли я выразился в отношении δx_0, δy_0, ... Вот в чем дело: координаты x, y, z принадлежат кривой, которую описывает точка m и которая проходит через точки x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1; координаты $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ принадлежат соседней

---

* Лагранж и другие математики называют $\sum \frac{mv^2}{2}$ половиной живой силы, но теперь довольно часто называют $\sum \frac{mv^2}{2}$ полной живой силой, что предпочтительнее.

кривой, которую Лагранж заставляет проходить через те же точки, откуда получается: $\delta x_0 = 0$, $\delta y_0 = 0, \ldots$ Следовательно, minimum имеет $\int (\Pi + T)\,dt$, а не $\int T dt$. Посмотрим, что нам следует сказать об этом. Нужно придать минимальное значение интегралу $\int (\Pi + T)\,dt$; получим

$$\int (\delta\Pi + \delta T)\,dt = 0;$$

но

$$\delta T = \sum m\left(\frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{dt^2}\right) = -\sum m\left(\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right) + \\ + \frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt}\right).$$

Отсюда, подставляя,

$$\int\left[\delta\Pi - \sum m\left(\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right)\right]dt = \\ = \sum m\left(\frac{dx_0\delta x_0 + dy_0\delta y_0 + dz_0\delta z_0}{dt}\right) - \sum m\left(\frac{dx_1\delta x_1 + dy_1\delta y_1 + dz_1\delta z_1}{dt}\right).$$

Члены под знаком $\int$ должны обращаться в нуль независимо от тех, которые стоят вне этого знака, и потому

$$\delta\Pi - \sum m\left(\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right) = 0$$

или

$$\sum\left(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - m\,\frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}\right) = 0,$$

что и представляет уравнение движения.

Вот принцип наименьшего действия, не считая некоторых ограничений, в сущности совершенно излишних, которые я ввел для того, чтобы возможно меньше разойтись с Лагранжем. Я изложу его иначе, а именно так: 1) я буду употреблять любые координаты; 2) (что существенно) я заменю условия maxima и minima условиями интегрируемости. Вы знаете, что условия интегрируемости играют важнейшую роль в механике, например

в гидростатике и гидродинамике. Я утверждаю, что вся механика сводится к вопросу об интегрируемости, которое заключает условие maxima и minima как частный случай; она требует только, чтобы вариация была интегрируемой, тогда как maximum требует не только интегрируемости вариации, но и того, чтобы ее интеграл равнялся нулю.

Остроградский.

Письмо 2-е

Я сообщил некоторым из моих друзей нижеследующий результат, который заключает всю механику, и спешу сообщить об этом результате и Вам, чтобы в случае необходимости опереться на Ваше свидетельство.

Момент движущих сил плюс момент сил, заменяющих связи системы, плюс вариация живой силы, выраженные в любых координатах, представляют полную производную по времени.

Это — самый простой и общий результат, какой могут дать динамические соображения. Итак, условие полной производной не является необходимым только для гидростатики и гидродинамики; оно свойственно всей науке о движении.

Ваш друг навеки

2 февраля 1853 г. *Остроградский.*

Письмо 3-е

Дорогой друг!

На днях мне попался том журнала, издаваемого г-ном Лиувиллем, за 1842 г. Я был очень удивлен, прочитав там две маленьких статьи, принадлежащие знаменитому редактору. Первая помещена на стр. 134; она озаглавлена «Sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\times\frac{dy}{dx}+F(y)\frac{dy^2}{dx^2}=0$».

Г-н Лиувилль полагает, что это уравнение можно ввести в курсы интегрального исчисления в качестве примера интегри-

рования, которое он, очевидно, считает примечательным. Нам кажется, что если бы нагрузить курсы интегрального исчисления подобными примерами, то они получились бы весьма объемистыми и весьма мало поучительными в отношении дифференциальных уравнений.

Г-н Лиувилль интегрирует уравнение способом изменения произвольных постоянных; но его уравнение интегрируется сразу, как только написать его в форме

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0,$$

и дает

$$\lg\frac{dy}{dx} + \int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = \mathrm{const}.$$

или

$$\frac{dy}{dx} = Ce^{-\int f(x)dx}e^{-\int F(y)dy},$$

откуда

$$e^{\int F(y)dy}dy = Ce^{-\int f(x)dx}dx,$$

и, следовательно,

$$\int e^{\int (y)dy}dy = C\int e^{-\int f(x)dx}dx + C',$$

где C и C' — произвольные постоянные.

Второй мемуар находится на стр. 163; он озаглавлен «Sur un problème de géometrie relatif à la théorie des maxima et minima».

Эта задача, которую г-н Лиувилль давно дает в своих лекциях, заключается в нахождении наиболее короткой или наиболее длинной прямой, которую можно провести к данному кругу из точки A, взятой в его плоскости.

Обозначим буквой O центр круга, буквами x и y — координаты некоторой точки M на окружности и буквой r — радиус; пусть далее $OA = a$. Предполагая, что ось x совпадает с прямой OA, получим

$$y^2 + (a - x)^2 = a^2 - 2ax + r^2$$

для выражения, которое должно быть maximum или minimum. Г-н Лиувилль, забывая, что функция $a^2-2ax+r^2$ должна быть maximum или minimum лишь для значений x, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=r^2$, считает, что на основании обычного правила следует приравнять нулю производную этой функции $a^2-2ax+t^2$, т. е. положить $-2a=0$, что нелепо. Но если бы г-н Лиувилль принял во внимание уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, то он нашел бы, что общее правило дает уравнение

$$-2a\lambda x+\lambda(xdx+ydy)=0,$$

которое распадается на следующие два:

$$-2a+\lambda x=0, \quad \lambda y=0$$

и дает

$$y=0, \quad x=\pm r, \quad \lambda=\pm\frac{2a}{r}.$$

Сделав ошибку в приложении обычного правила, г-н Лиувилль добавляет: «Следует заметить, что по самой природе геометрических вопросов...» (до конца страницы). Но талантливому математику следовало бы обратить внимание на то, что обстоятельство, на которое он указывает, как раз заключается в уравнении $x^2+y^2=r^2$. Рассмотрев его, он не получил бы накакого парадокса. Мы не остановились бы на столь простом вопросе, если бы заблуждение г-на Лиувилля было просто недосмотром. Но, повидимому, это не так; искусный математик, очевидно, считал, что поскольку функция $a^2-2ax+r^2$, которой нужно дать максимальное или минимальное значение, содержит лишь одну переменную, то излишне рассматривать уравнение $x^2+y^2=r^2$, которое только определяет y в функции x; однако это самое уравнение ограничивает значения x, который, в силу этого уравнения, не может выйти из пределов $-r$ и $+r$. Кроме того, теория гласит, что когда дело идет о функциях, переменные которых связаны между собой, то нулю должны быть равны уже не производные, а дифференциалы, что не всегда одно и то же. Так, для функции $a^2-2ax+r^2$, положив равным нулю ее дифференциал,

получим $-2adx=0$, откуда $dx=0$; далее, поскольку $xdx+ydy=0$, получим $ydy=0$, а так как dy не может быть равно нулю, ибо, полагая $dx=0$ и $dy=0$, нельзя перейти от точки M к соседней точке, то получаем $y=0$ и $x=\pm r$, как это и должно быть.

Остроградский.

Письмо 4-е

Вернемся к общему уравнению движения

$$\sum m\frac{d_1(v\omega s\omega)}{dt}\delta\varepsilon=\sum P\omega s\alpha\delta\varepsilon+\lambda\delta L+\lambda_1\delta L_1+\lambda_2\delta L_2+\ldots \qquad (1)$$

Известно, что́ обозначают эти буквы: m, v, $\delta\varepsilon$, ω, P, α представляют соответственно массу, скорость, абсолютно произвольное перемещение, угол между v и $\delta\varepsilon$, движущую силу, угол между P и $\delta\varepsilon$; далее $\delta L=a\cos\theta\,\delta\varepsilon+a'\cos\theta'\,\delta\varepsilon'+\ldots$, а λ — множители.

Положим, что в момент t' система получает удар со стороны сил весьма большой интенсивности и что связи между ее различными точками устанавливаются внезапно; но действие этих сил длится лишь крайне малое время τ, так что всякое внезапное действие на систему прекращается в момент $t'+\tau$. Приложим уравнение (1) к какому-либо моменту, заключенному между t' и $t'+\tau$, так что оно будет содержать среди сил P и связей δL импульсивные силы и внезапно установленные связи. В течение крайне малого промежутка τ положение системы не изменится заметным образом, и, следовательно, величины $\delta\varepsilon$, зависящие лишь от положения системы, можно рассматривать как неизменяемые; поэтому дифференциал $d_1(v\cos\omega)$ можно считать полным, и можно будет ввести $\delta\varepsilon$ под знак d, так что вследствие неизменяемости положения системы будем иметь

$$d_1(v\cos\omega)\,\delta\varepsilon=d\,(v\cos\omega\,\delta\varepsilon),$$

и, следовательно, уравнение (1) обратится в

$$\frac{d\,(\sum mv\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt}=\sum P\cos\alpha\,\delta\varepsilon+\lambda\delta L+\lambda_1\delta L_1+\ldots$$

Положим, что в момент t' все связи системы прекращаются, не потому, что они прекращаются на самом деле, но лишь для вывода следствия из такого предположения, так как это следствие нам понадобится. Будем иметь в таком случае

$$\frac{d}{dt}\left[\sum (mu \cos \overline{\omega}\, \delta\varepsilon)\right] = \sum P \cos \alpha\, \delta\varepsilon,$$

ибо все движущие силы остаются; u обозначает скорость, $\overline{\omega}$ — угол между u и $\delta\varepsilon$. Вычитая, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\sum (mv \cos \omega\, \delta\varepsilon) - \sum (mu \cos \overline{\omega}\, \delta\varepsilon)\right] = \lambda \delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \ldots$$

или, умножая на dt и интегрируя от t' до $t' + \tau$,

$$\sum (mv \cos \omega\, \delta\varepsilon) = \sum (mu \cos \overline{\omega}\, \delta\varepsilon) + \delta L \int\limits_{t'}^{t'+\tau} \lambda dt + \delta L_1 \int\limits_{t'}^{t'+\tau} \lambda_1 dt + \ldots$$

Мы вынесли δL, δL_1, ... за знак интеграла, потому что эти вариации зависят только от положения системы, которое предположено неизменным в течение весьма малого времени τ. Положив для сокращения

$$\int\limits_{t'}^{t'+\tau} \lambda dt = \mu, \quad \int\limits_{t'}^{t'+\tau} \lambda_1 dt = \mu_1, \quad \ldots,$$

получим

$$\sum (mv \cos \omega\, \delta\varepsilon) = \sum (mu \cos \omega\, \delta\varepsilon) + \mu \delta L + \mu_1 \delta L_1 + \ldots;$$

это общие формулы для удара ... [1].

Остроградский.

Письмо 5-е

Движение простого маятника, принимая во внимание вращение Земли, было рассмотрено г-ном Бине в «Comptes rendus de l'Acad. de Paris» (№ 7, от 17 февраля 1851 г.). Г-н Бине исходит из уравнений, которые дает Пуассон в своей работе о полете снарядов. Но доказательство этих уравнений представ-

ляется нам слишком сложным, чтобы они могли быть включены в курс рациональной механики, где этот вопрос, интерес к которому сильно возрос после опыта г-на Фуко, необходимо должен найти место. Мы рассмотрели его непосредственно как частный случай общей задачи об относительном движении. Эта задача была разрешена Кориолисом в его курсе механики твердых тел; но просвещенный автор усложнил ее решение введением силы d'entrainement F_l, значение которой приходится определять в каждом отдельном случае. Решение, данное нами в нашем курсе механики * и воспроизведенное нами здесь, представляется нам крайне простым; оно имеет еще и то преимущество, что приводит к доказательству уравнений равновесия и движения неизменяемой системы. Задача, которую мы имеем в виду разрешить, формулируется так.

Найти уравнение движения материальной точки M по отношению к трем прямоугольным осям, которые движутся в пространстве каким угодно образом, не переставая, однако, оставаться перпендикулярными. На точку M могут при этом действовать силы, среди которых будут заключаться и сопротивления препятствий, если она не свободна.

Если обозначим через x, y, z координаты массы M по отношению к подвижным осям, то эти координаты будут неизвестными задачи, и наша цель будет состоять в том, чтобы получить уравнения, из которых можно было бы найти их значения. Отнесем для этого и массу M и подвижные оси к осям, неподвижным в пространстве, и обозначим через x_1, y_1, z_1 и α, β, γ координаты точки M и начала подвижных осей по отношению к неподвижным осям [1]. Обозначим также соответственно через a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' косинусы углов x_1x, x_1y, x_1z, y_1x, y_1y, z_1x, z_1y, z_1z и положим для сокращения $x_1-\alpha=\xi$, $y_1-\beta=\eta$, $z_1-\gamma=\zeta$; получим

$$\xi=ax+by+cz,$$

$$\eta=a'x+b'y+c'z,$$

$$\zeta=a''x+b''y+c''z$$

* Курс литографирован.

и, обратно,

$$x = a\xi + a'\eta + a''\zeta,$$

$$y = b\xi + b'\eta + b''\zeta.$$

$$z = c\xi + c'\eta + c''\zeta.$$

Дифференцируя предыдущие значения x, y, z и положив для сокращения

$$ad\xi + a'd\eta + a''d\zeta = dx',$$

$$bd\xi + b'd\eta + b''d\zeta = dy',$$

$$cd\xi + c'd\eta + c''d\zeta = dz',$$

будем иметь

$$dx = dx' + \xi da + \eta da' + \zeta da'',$$

$$dy = dy' + \xi db + \eta db' + \zeta db'',$$

$$dz = dz' + \xi dc + \eta dc' + \zeta dc''$$

и одновременно

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= adx' + bdy' + cdz', \\ d\eta &= a'dx' + b'dy' + c'dz', \\ d\zeta &= a''dx' + b''dy' + c''dz'. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Подставив в выражения для dx, dy, dz вместо ξ, η, ζ их значения в зависимости от x, y, z и положив для краткости

$$cdb + c'db' + c''db'' = pdt,$$

$$adc + a'dc' + a''dc'' = qdt,$$

$$bda + b'da' + b''da'' = rdt,$$

получим [2]

$$\left.\begin{aligned} dx' &= dx + (qz - ry)\,dt, \\ dy' &= dy + (rx - pz)\,dt, \\ dz' &= dz + (py - qx)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Будем теперь рассматривать для простоты только одну ось, например ось x; то, что мы скажем о ней, будет относиться

и к двум остальным. Дифференцируя полученное выше значение dx', т. е. значение

$$dx' = ad\xi + a'd\eta + a''d\zeta,$$

и сравнивая оба результата, имеем

$$d^2x + (qdz - rdy)\,dt + (zdq - ydr)\,dt =$$
$$= ad^2\xi + a'd^2\eta + a''d^2\zeta + dad\xi + da'd\eta + da''d\zeta.$$

Подставив вместо $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ их значения, найдем

$$d^2x + (qdz - rdy)\,dt + (zdq - ydr)\,dt + (qdz' - rdy')\,dt =$$
$$= ad^2\xi + a'd^2\eta + a''d^2\zeta.$$

Но, взяв вместо dy' и dz' их значения из (b), получаем

$$qdz' - rdy' = qdz - rdy + [(px + qy + rz)\,p - (p^2 + q^2 + r^2)\,x]\,dt.$$

Следовательно, имеем после подстановки

$$d^2x + 2\,(qpd - rdy)\,dt + (zdq - ydr)\,dt +$$
$$+ [(px + qy + rz)\,p - (p^2 + q^2 + r^2)\,x]\,dt = ad^2\xi + a'd^2\eta + a''d^2\zeta.$$

Но $\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ представляет, очевидно, проекцию. на ось x_1 силы, действующей на точку M, относительно начала подвижных координат, а $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ аналогично представляют проекции той же силы на оси y_1 и z_1; отсюда следует, что

$$\frac{ad^2\xi + a'd^2\eta + a''d^2\zeta}{dt^2}$$

есть, очевидно, проекция той же силы на подвижную ось x. Обозначив эту проекцию через X и аналогично через Y и Z проекции на подвижные оси y и z, получим три следующих уравнения, причем два последних написаны по аналогии:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \left(z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt}\right) + (px + qy + rz)\,p -$$
$$-(p^2 + q^2 + r^2)\,x = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)+\left(x\frac{dr}{dt}-z\frac{dp}{dt}\right)+$$

$$+(px+qy+rz)\,q-(p^2+q^2+r^2)\,y=Y$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)+\left(y\frac{dp}{dt}-x\frac{dq}{dt}\right)+(px+qy+rz)\,z-$$

$$-(p^2+q^2+r^2)\,z=Z.$$

Эти уравнения точны, и их легко можно приложить к простому маятнику.

Остроградский.

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ УДАРА

1. Напомним сначала общие уравнения движения, которые мы дали в работе о мгновенных перемещениях.*

Представим себе систему материальных точек или элементов тела, связанных между собой некоторым определенным образом, и обозначим их массы соответственно через m, m', m'', m''', ... Способ связи между этими массами представляет собой аналитическое определение системы, а потому, как известно, его задание равносильно заданию перемещений, которые система может принимать в каждый момент. Это задание вытекает из природы системы, т. е. из природы связей, стесняющих движение точек m, m', m'', m''' ... Связи же эти всегда состоят в том, что при движении системы некоторые величины L, L_1, L_2, L_3, ..., которые естественно выражают какие-либо свойства системы, зависящие от ее положения, будут оставаться неизменными или не смогут убывать, или, наконец, не смогут возрастать. Таков, например, случай гибких и нерастяжимых нитей, соединяющих точки системы.

Наличие поверхности, которую точка была бы вынуждена описывать, выразилось бы или в неизменяемости функции от координат, или функции поверхности,** или в невозможности ее убывания, в зависимости от того, должна ли точка оставаться на поверхности, или только быть смежной с ней.

---

* Mémoires de l'Acad. impériale, t. III, стр. 565.

** Под функцией поверхности мы разумеем ту функцию координат которая, будучи приравнена нулю, дала бы уравнение поверхности.

Нетрудно видеть, что для нахождения возможных перемещений системы нам нужно лишь выразить алгебраически только что упомянутые свойства величин L, L_1, L_2, L_3, ... Для этого представим себе систему бесконечно малых прямых $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ..., в общем совершенно произвольных и по величине, и по направлению, которые послужат нам для выражения всех перемещений, какие только мы можем присвоить мысленно соответственно массам m, m', m'', m''', ... в каждый момент. Начала таких прямых будут находиться в самих массах m, m', m'', m''', ..., а концы — в тех точках, в которых они окажутся после перемещения, если действительно они могут принять то перемещение, которое мы им приписали лишь мысленно. Чтобы можно было отнести их к каждому моменту, величины $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... должны произвольным образом содержать время, которое мы обозначим через t и будем считать от начала, взятого или наиболее удобно, или же произвольно.

Установив это, будем рассматривать систему в конце какого-либо [промежутка] времени t, чтобы то, что мы о ней скажем, могло относиться к любому моменту; допустим мысленно, что за момент dt, следующий за временем t, система переместилась так, что ее точки m, m', m'', m''', ... соответственно прошли расстояния $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ..., упомянутые нами выше; будем искать изменения ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ..., которые получат величины L, L_1, L_2, L_3, ... вследствие этих перемещений. Не следует только терять из виду, что эти перемещения — отнюдь не реальные, ибо $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... представляют все, что мы только можем вообразить относительно мгновенных перемещений системы, т. е. не только возможные перемещения или те, которые допускаются связями или препятствиями, стесняющими движения системы, но и те, которые невозможны в силу этих связей или препятствий. В отношении $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... нет иных ограничений, кроме тех, что они бесконечно малы и что они соответствуют некоторому моменту времени.

Для нахождения изменений ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ... не существует общего метода, ибо каждый частный случай требует своего

особого способа, основанного чаще всего лишь на весьма простых геометрических соображениях.

II. Предположим, например, что по прошествии времени t точка m находится в соприкосновении с некоторой непроницаемой поверхностью и может сходить с нее в ту сторону пространства, где функция поверхности положительна. Нужно найти перемещения, допускаемые этим условием. Обозначим через μ точку на поверхности, соответствующую точке m, а через $d\mu$ — фактическое перемещение точки μ за время dt. Пусть $\Delta\varepsilon$ представляет по-прежнему любое перемещение точки m, а $\Delta\xi$ — прямую, соединяющую концы $d\mu$ и $d\varepsilon$; эта прямая $d\xi$ должна вся целиком находиться вне непроницаемой поверхности или на самой этой поверхности, если $\Delta\varepsilon$ — возможное перемещение; из этого следует, что проекция $\Delta\xi$ на нормаль к поверхности в конце времени $t+dt$ и в точке, где находится μ в этот же момент, должна быть положительна или равна нулю. Но эта проекция выражается разностью

$$\Delta\varepsilon \cos\theta - d\mu \cos\alpha,$$

где θ и α обозначают углы, образуемые $\Delta\varepsilon$ и $d\mu$ с нормалью к поверхности в точке μ в конце времени $t+dt$, а потому будем иметь

$$\Delta\varepsilon \cos\theta - d\mu \cos\alpha > 0,$$

не исключая и равенства во всех тех случаях, когда $\Delta\varepsilon$ представит возможное перемещение. Мы вскоре увидим, что в этом неравенстве можно будет пренебречь бесконечно малыми второго порядка и, следовательно, допустить, что углы θ и α представляют собою углы, образованные $\Delta\varepsilon$ и $d\mu$ с нормалью в точке μ не в конце времени $t+dt$, а в конце времени t. В этом предположении наше неравенство, не исключающее и равенства, выразит условие возможных перемещений, относящихся к непроницаемой поверхности, ибо оно необходимо будет удовлетворяться любым значением $\Delta\varepsilon$, которому не препятствует эта поверхность, и, конечно, не будет удовлетворяться чисто воображаемыми $\Delta\varepsilon$, т. е. теми, которые невозможны вследствие непроницаемости поверхности.

Что касается проекции $d\mu \cos\alpha$, то она будет задана в каждом частном случае, ибо способ, каким перемещается и изменяется непроницаемая поверхность, должен быть известен. Положим, например, что мы знаем соответствующее уравнение

$$f(x, y, z, t) = 0$$

в прямоугольных координатах. Если x, y, z представляют координаты μ, а стало быть и m, в конце времени t, то $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ будут координатами μ в конце времени $t + dt$ при условии пренебрежения бесконечно малыми второго порядка. Мы имеем

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{dt}dt = 0$$

и потому, разделив на радикал

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}},$$

взятый с положительным знаком, получим сразу

$$d\mu \cos\alpha + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} = 0;$$

откуда условие возможности $\Delta\varepsilon$ будет

$$\Delta\varepsilon \cos\theta + \frac{\frac{df}{dt}dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} = 0,$$

не исключая отсюда и неравенства.

Впрочем, если поверхность задана уравнением между прямоугольными координатами и временем, то условие относящихся к ней возможных перемещений m найдется еще проще следующим образом. Обозначив через $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ координаты m после перемещения $\Delta\varepsilon$, получим сразу

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) > 0,$$

не исключая равенства, ибо точка m может и не сходить с поверхности.

Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка и принимая во внимание, что $f=0$, получим

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ t+\Delta t)=\frac{df}{dx}\Delta x+\frac{df}{dy}\Delta y+\frac{df}{dz}\Delta z+\frac{df}{dt}\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{df}{dx}\Delta x+\frac{df}{dy}\Delta y+\frac{df}{dz}\Delta z+\frac{df}{dt}\Delta t>0,$$

и, разделив на радикал

$$\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}},$$

взятый с положительным знаком, имеем

$$\Delta\varepsilon\cos\theta+\frac{\frac{df}{dt}\,dt}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2}+\frac{df^2}{dy^2}+\frac{df^2}{dz^2}}}=0.$$

III. Найдя приращения ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ..., вспомним свойства величин L, L_1, L_2, L_3, ..., которыми определяются возможные перемещения системы; приравняем нулю приращения тех из упомянутых величин, которые не могут изменяться, и будем считать положительными изменения величин, которые не могут уменьшаться; при этом не исключается и равенство нулю, ибо величины, которым соответствуют эти изменения, в нашем предположении не изменяются, а следовательно, не могут уменьшиться. Наконец, будем считать отрицательными приращения величин, которые не могут возрастать, не исключая и равенства нулю.

Таким образом, мы получим условия возможных перемещений; предположим, например, что они будут

$$\Delta L>0,\ \Delta L_1>0,\ \Delta L_2>0,\ \Delta L_3>0,\ \ldots$$

Заметим сначала, что перемещения $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ..., входящие в ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ..., не удовлетворяют поставленным

выше условиям, так как они, как было уже сказано, произвольны. Если приписать им какие-либо частные значения, то узнать, возможны или нет эти значения для данной системы, можно смотря по тому, будут ли они удовлетворять этим условиям, или нет.

Заметим далее, что условие

$$\Delta L_2 < 0,$$

не исключая равенства, может быть заменено условием

$$-\Delta L_2 > 0.$$

В связи с этим замечанием мы можем положить — и в дальнейшем так и будем делать для единообразия, — что в неравенствах, определяющих возможные перемещения и никогда не исключающих равенства, вершина знака $>$ всегда будет обращена к нулю.

Однако наиболее важное замечание относится к способу образования приращений ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ..., которые, безусловно, будут содержать бесконечно малые различных порядков. Если обозначим через n порядок одной из величин L, L_1, L_2, L_3, ..., то соответствующее изменение будет содержать члены порядков $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., которые мы обозначим соответственно через $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, ..., так что значение упомянутого изменения будет

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots$$

Но так как это значение должно быть равно нулю или положительно, то необходимо, чтобы его первый член $(n+1)$ был равен нулю или положителен, так же как и весь ряд; это объясняется тем, что остальные члены как бесконечно малые более высокого порядка, чем он, не могут ни обратить ряд в нуль, ни изменить его знак, который будет всегда тот же, что и у первого члена. Отсюда следует, что при вычислении приращений ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ... следует принимать во внимание только первую степень перемещений $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... и разрешается отбросить все те члены, в которые эти перемещения входят, как члены второго или более высокого порядка. Вследствие этого приращения ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ... станут линейными функциями от $\Delta\varepsilon$,

$\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... Поэтому их можно будет найти обычными методами вариационного исчисления, и они будут иметь вид

$$a\Delta\varepsilon\cos\psi + a'\Delta\varepsilon'\cos\psi' + a''\Delta\varepsilon''\cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi''' + \ldots + Tdt$$

или будут способны его принять. Буквы a, a', a'', a''', ... обозначают количества, или заданные, или зависящие заданным образом от положения системы, т. е. от координат масс m, m', m'', m''', ... и времени t. Буквы ψ, ψ', ψ'', ψ''', ... представляют углы, образуемые перемещениями $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... с определенными направлениями, которые, вообще говоря, трудно назвать, но в отдельных случаях они могут быть или направлениями прямых, соединяющих точки системы, или направлениями нормалей к непроницаемым поверхностям, с которыми смежны некоторые из этих же точек, или направлениями неподвижных прямых, принятых за оси координат, или, наконец, иными направлениями, которые будут известны в каждом частном случае. Мы будем обозначать их вообще через D, D', D'', D''', ..., так что, например, ψ'' будет угол, заключенный между $\Delta\varepsilon''$ и некоторым направлением D'', свойств которого мы точно не определяем.

Считая, что ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ... имеют указанную выше форму, предположим, что перемещения $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... будут возможными, когда вариации ΔL будут удовлетворять неравенствам

$$\Delta L > 0,\ \Delta L_1 > 0,\ \Delta L_2 > 0,\ \Delta L_3 > 0,\ \ldots, \tag{1}$$

причем некоторые из них, а может быть и все, могут оказаться и равенствами. Если эти условия не будут выполнены, то рассматриваемая система не сможет получить соответствующего перемещения $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ...

IV. Для каждого положения массы m, считая с начала движения, представим себе соответствующее $\Delta\varepsilon$, произвольное, но удовлетворяющее условию непрерывности, без которого соображения, подобные только что изложенным, были бы невозможны. Окончания всех [отрезков] $\Delta\varepsilon$ образуют кривую, бесконечно близкую к траектории m, но вообще произвольную. Представим себе некоторую точку μ, которая движется по этой кривой, когда m пере-

мещается по своей траектории, и которая в конце времени $t+dt$ находится на оконечности того из перемещений $\Delta\varepsilon$, начало которого находится в точке m в конце времени t. Таким образом, $\Delta\varepsilon$ будет отрезком $m\mu$, соединяющим положение точки m в момент t с положением μ в момент $t+dt$. Заметим, что любая величина Q, например, пройденное пространство, скорость, координаты и т. п., относящаяся к точке m, обратится в $Q+\Delta Q$ на конце $\Delta\varepsilon$ в точке μ; ΔQ представляет вариацию, учитывающую изменение не только вида зависимости Q от времени, но и изменение самого времени. Введем расстояние между точками m и μ в момент времени t; это расстояние мы обозначим через $\delta\varepsilon$. Начало этого бесконечно малого отрезка отнесем к точке m, как и начало $\Delta\varepsilon$. Некоторая величина, которую мы только что обозначили через Q, обратится в $Q+\delta Q$ на конце $\delta\varepsilon$; здесь δQ означает вариацию, где изменяется только вид зависимости Q от t, само же t ни в какой мере не изменяется.

Ясно, что $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ есть расстояние, разделяющее точки m и μ в момент времени $t+dt$. Поэтому, если мы обозначим через s дугу траектории m, описанную за время t, так что ds будет расстоянием, фактически пройденным этой точкой в момент τ, следующий за временем t, то мы сразу увидим, что $\Delta\varepsilon$ есть третья сторона треугольника, две другие стороны которого суть ds и $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$. Таким образом, обозначая через ψ, α и θ углы, образуемые $\Delta\varepsilon$, ds и $\delta\varepsilon$ с одним и тем же направлением D, будем иметь

$$\Delta\varepsilon\cos\psi = ds\cos\alpha + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\theta + d_1\theta).$$

Мы пишем $\theta+d_1\theta$, а не $\theta+d\theta$, потому что направление D, на которое мы проектируем прямые $\Delta\varepsilon$, ds и $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$, может быть переменным: тогда $\theta+d\theta$ обозначало бы угол между $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ и направлением D в момент времени $t+dt$, а нам нужно взять угол между $\delta\varepsilon+d\delta\varepsilon$ и D в конце времени t. Иными словами, угол θ изменяется потому что изменяются оба направления, $\delta\varepsilon$ и D, но когда мы сравниваем проекции, нам нужно принимать во внимание только изменение первого из двух направлений,

так что $\theta + d_1\theta$ означает угол между $\delta\varepsilon$ в момент времени $t + dt$ и D в момент времени t. Но

$$(\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\theta + d_1\theta) = \delta\varepsilon\cos\theta + d_1(\delta\varepsilon\cos\theta),$$

причем мы пишем $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ для обозначения неполного дифференциала от $\delta\varepsilon\cos\theta$; согласно сказанному выше, нетрудно видеть, чего ему недостает для того, чтобы он стал полным. Однако он не должен быть необходимо полным, чтобы $d_1(\delta\varepsilon\cos\theta)$ представило бесконечно малую величину второго порядка; отбрасывая величины этого порядка, получим

$$\Delta\varepsilon\cos\psi = ds\cos\alpha + \delta\varepsilon\cos\theta.$$

Очевидно, что сказанное о перемещениях точки m может быть применено слово в слово к перемещениям всех других точек системы; так, концы отрезков $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... опишут кривые, весьма близкие соответственно к траекториям точек m', m'', m''', ... Поэтому, если мы обозначим через s', $\delta\varepsilon'$, s'', $\delta\varepsilon''$, s''', $\delta\varepsilon'''$, ... для m', m'', m''', ... величины, соответственно аналогичные тем, которые мы обозначили через s и $\delta\varepsilon$ для m, то получим

$$\Delta\varepsilon'\cos\psi' = ds'\cos\alpha' + \delta\varepsilon'\cos\theta',$$

$$\Delta\varepsilon''\cos\psi'' = ds''\cos\alpha'' + \delta\varepsilon''\cos\theta'',$$

$$\Delta\varepsilon'''\cos\psi''' = ds'''\cos\alpha''' + \delta\varepsilon'''\cos\theta''',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Здесь буквы ψ', α', θ'; ψ'', α'', θ''; ψ''', α''', θ''', ... обозначают соответственно углы, образуемые $\Delta\varepsilon'$, ds', $\delta\varepsilon'$ с некоторым направлением D'; $\Delta\varepsilon''$, ds'', $\delta\varepsilon''$ — с направлением D''; $\Delta\varepsilon'''$, ds''', $\delta\varepsilon'''$ — с направлением D''' и т. д.

Подставим предыдущие значения $\Delta\varepsilon\cos\psi$, $\Delta\varepsilon'\cos\psi'$, $\Delta\varepsilon''\cos\psi''$, ... в вариации ΔL, ΔL_1, ΔL_2, ... или в выражение

$$a\Delta\varepsilon\cos\psi + a'\Delta\varepsilon'\cos\psi' + a''\Delta\varepsilon''\cos\psi'' + a'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi''' + \dots + Tdt,$$

которое представляет одну из вариаций, например первую. Получим

$$\Delta L = ads\cos\alpha + a'ds'\cos\alpha' + a''ds''\cos\alpha'' + a'''ds'''\cos\alpha''' + \ldots + Tdt +$$
$$+ a\delta\varepsilon\cos\theta + a'\delta\varepsilon'\cos\theta' + a''\delta\varepsilon''\cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon'''\cos\theta''' + \ldots,$$

или, если положим для краткости

$$ads\cos\alpha + a'ds'\cos\alpha' + a''ds''\cos\alpha'' + a'''ds'''\cos\alpha''' + \ldots + Tdt = dL,$$
$$a\delta\varepsilon\cos\theta + a'\delta\varepsilon'\cos\theta' + a''\delta\varepsilon''\cos\theta'' + a'''\delta\varepsilon'''\cos\theta''' + \ldots = \delta L,$$

будем иметь

$$\Delta L = dL + \delta L.$$

Точно так же

$$\Delta L_1 = dL_1 + \delta L_1,$$
$$\Delta L_2 = dL_2 + \delta L_2,$$
$$\Delta L_3 = dL_3 + \delta L_3,$$
. . . .

Нетрудно найти, что представляют собой величины dL_1, δL_1, dL_2, δL_2, dL_3, δL_3, ..., ибо приращения ΔL_1, ΔL_2, ΔL_3, ... построены совершенно аналогично ΔL, а именно:

$$\Delta L_1 = a_1\Delta\varepsilon\cos\psi_1 + a_1'\Delta\varepsilon'\cos\psi_1' + a_1''\Delta\varepsilon''\cos\psi_1'' + a_1'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi_1''' + \ldots + T_1 dt$$
$$\Delta L_2 = a_2\Delta\varepsilon\cos\psi_2 + a_2'\Delta\varepsilon'\cos\psi_2' + a_2''\Delta\varepsilon''\cos\psi_2'' + a_2'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi_2''' + \ldots + T_2 dt,$$
$$\Delta L_3 = a_3\Delta\varepsilon\cos\psi_3 + a_3'\Delta\varepsilon'\cos\psi_3' + a_3''\Delta\varepsilon''\cos\psi_3'' + a_3'''\Delta\varepsilon'''\cos\psi_3''' + \ldots + T_3 dt$$
. . . .

где a_1, a_1', a_1'', a_1''', ..., T_1, a_2, a_2', a_2'', a_2''', ..., T_2, a_3, a_3', a_3'', a_3''', ..., T_3 являются функциями координат m, m', m'', m''', ..., заданными в каждом отдельном случае, а ψ_1, ψ_1', ψ_1'', ψ_1''', ..., ψ_2, ψ_2', ψ_2'', ψ_2''', ..., ψ_3, ψ_3', ψ_3'', ψ_3''', ... представляют собой углы, образованные перемещениями $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... с некоторыми направлениями, которые невозможно определить с точностью и которые мы будем обозначать через D_1, D_1', D_1'', D_1''', D_2, D_2', D_2'', D_2''', ..., D_3, D_3', D_3'', D_3''', ...

Так, например, ψ_2''' представит угол между $\Delta\varepsilon'''$ и направлением D_2'''. Далее будем иметь

$$dL_1 = a_1\, ds \cos\alpha_1 + a_1'\, ds' \cos\alpha_1' + a_1'' ds'' \cos\alpha_1'' + \ldots + T_1 dt,$$

$$dL_2 = a_2 ds \cos\alpha_2 + a_2' ds' \cos\alpha_2' + a_2'' ds'' \cos\alpha_2'' + \ldots + T_2 dt,$$

$$dL_3 = a_3 ds \cos\alpha_3 + a_3' ds' \cos\alpha_3' + a_3'' ds'' \cos\alpha_3'' + \ldots + T_3 dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta L_1 = a_1 \delta\varepsilon \cos\theta_1 + a_1' \delta\varepsilon' \cos\theta_1' + a_1'' \delta\varepsilon'' \cos\theta_1'' + \ldots,$$

$$\delta L_2 = a_2 \delta\varepsilon \cos\theta_2 + a_2' \delta\varepsilon' \cos\theta_2' + a_2'' \delta\varepsilon'' \cos\theta_2'' + \ldots,$$

$$\delta L_3 = a_3 \delta\varepsilon \cos\theta_3 + a_3' \delta\varepsilon' \cos\theta_3' + a_3'' \delta\varepsilon'' \cos\theta_3'' + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Нетрудно найти углы, обозначаемые буквами α и θ с цифрами и со значками.

V. Рассмотрим один из дифференциалов dL, dL_1, dL_2, $dL_3, \ldots$, например первый; все, что мы скажем о нем, будет относиться и к остальным. Ясно, что дифференциал dL есть частное значение вариации ΔL, именно то, которое она принимает для действительного перемещения системы, являющегося, без сомнения, одним из возможных перемещений. Но в случае, когда возможность перемещений требовала бы, чтобы величина L не изменялась, т. е. если бы мы имели для возможных перемещений $\Delta L = 0$, то необходимо было бы, чтобы $dL = 0$. Если бы условие возможных перемещений требовало только, чтобы L не могло уменьшаться или чтобы L имело минимальное значение, то мы вновь получили бы $dL = 0$ как условие минимума, или, вернее, как условие того, чтобы L фактически не изменялось. Действительно, если бы эта величина возрастала, то dL не могло бы быть отрицательным, и сама величина L перестала бы быть минимальной.

Мы полагаем, что нам следует остановиться на некоторых подробностях, относящихся к этому случаю.

Если величина L представляет минимум, или, вернее, не может уменьшаться, то для того, чтобы это обстоятельство соответствовало связи или препятствию, система необходимо должна претерпевать перемещение, для которого L убывало бы; в противном случае свойство системы, в силу которого L не может убывать, не ставило бы ограничений ее движению, и, следовательно, можно было бы не принимать его во внимание. Таким образом, внешние усилия будут как бы не позволять дифференциалу dL принять положительное значение, а так как он не может быть отрицательным в силу свойств системы, то, стало быть, он должен быть равен нулю; то же будет иметь место для других дифференциалов dL_1, dL_2, $dL_3, \ldots$ Итак, мы будем иметь

$$dL = 0, \quad dL_1 = 0, \quad dL_2 = 0, \quad dL_3 = 0, \ldots \tag{2}$$

Если, однако, dL примет положительное значение, что могло бы произойти, если бы внешние усилия стремились заставить величину L возрастать, то в этом случае нужно было бы отбросить условие $L = \text{minimum}$ и не принимать во внимание условия $dL > 0$.

Таким образом, только что написанные уравнения (2) будут иметь место, если отбросить все лишнее.

Вследствие уравнений (2) вариации ΔL, ΔL_1, ΔL_2, $\Delta L_3, \ldots$ обратятся соответственно в δL, δL_1, δL_2, $\delta L_3, \ldots$, и поэтому условия (1) возможных перемещений обратятся в

$$\delta L > 0, \ \delta L_1 > 0, \ \delta L_2 > 0, \ \delta L_3 > 0, \ldots \tag{3}$$

Некоторые из этих неравенств — или даже все — могут быть равновесными, т. е. ни одно из них не исключает знака равенства. Перемещения $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon''', \ldots$, входящие в их левые части, произвольны; они не должны удовлетворять этим неравенствам; последние служат лишь для того, чтобы отличить возможные перемещения от невозможных.

Вариации δL, δL_1, δL_2, $\delta L_3, \ldots$ можно найти непосредственно, т. е. не вычисляя ΔL, ΔL_1, ΔL_2, $\Delta L_3, \ldots$ Для этого достаточно рассмотреть систему в двух положениях: в том, которое она

фактически занимает в момент времени t, и в том, которое она займет после того, как ее точки пройдут соответственно расстояния $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ... Оба положения отвечают одному и тому же моменту t, так что при переходе от одного к другому время не изменяется. Будем искать значения L', L'_1, L'_2, L'_3, ... величин L, L_1, L_2, L_3, ..., относящиеся ко второму положению, принимая во внимание только первые степени перемещений $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ...; тогда получим

$$\delta L = L' - L, \quad \delta L_1 = L'_1 - L_1, \quad \delta L_2 = L'_2 - L_2, \quad \delta L_3 = L'_3 - L_3 \text{ и т. д.}$$

Определение вариаций δL, δL_1, δL_2, δL_3, ... часто может быть упрощено путем разложения перемещений $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ..., которым отвечают эти вариации. Действительно, разложим каждое из этих перемещений на k других перемещений, удовлетворяющих условиям, обычным при разложениях этого рода. А именно, сделаем так, чтобы каждый отрезок $\Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon'$, $\Delta\varepsilon''$, $\Delta\varepsilon'''$, ... был замыкающей стороной соответствующего многоугольника, остальные стороны которого являются новыми перемещениями.

Обозначим эти последние перемещения через

$$\begin{array}{ll}
\delta\varepsilon_1, \ \delta\varepsilon_2, \ \delta\varepsilon_3, \ \ldots, \ \delta\varepsilon_k & \text{для массы } m, \\
\delta\varepsilon'_1, \ \delta\varepsilon'_2, \ \delta\varepsilon'_3, \ \ldots, \ \delta\varepsilon'_k & \text{для массы } m', \\
\delta\varepsilon''_1, \ \delta\varepsilon''_2, \ \delta\varepsilon''_3, \ \ldots, \ \delta\varepsilon''_k & \text{для массы } m'', \\
\delta\varepsilon'''_1, \ \delta\varepsilon'''_2, \ \delta\varepsilon'''_3, \ \ldots, \ \delta\varepsilon'''_k & \text{для массы } m''' \text{ и т. д.}
\end{array}$$

Принимая во внимание лишь первые степени этих перемещений, будем искать изменения $\delta_1 L$, $\delta_1 L_1$, $\delta_1 L_2$, $\delta_1 L_3$, ... величин L, L_1, L_2, L_3, ..., соответствующие перемещениям $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon'_1$, $\delta\varepsilon''_1$, $\delta\varepsilon'''_1$, ..., затем будем искать изменения $\delta_2 L$, $\delta_2 L_1$, $\delta_2 L_2$, $\delta_2 L_3$, ... тех же величин L, L_1, L_2, L_3, ..., соответствующие перемещениям $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon'_2$, $\delta\varepsilon''_2$, $\delta\varepsilon'''_2$, ..., затем — изменения $\delta_3 L$, $\delta_3 L_1$, $\delta_3 L_2$, $\delta_3 L_3$, ..., соответствующие перемещениям $\delta\varepsilon_3$, $\delta\varepsilon'_3$, $\delta\varepsilon''_3$, $\delta\varepsilon'''_3$, ..., и будем продолжать так до тех пор, пока не найдем вариаций $\delta_k L$, $\delta_k L_1$, $\delta_k L_2$,

$\delta_k L_3, \ldots$, отвечающих перемещениям $\delta\varepsilon_k$, $\delta\varepsilon'_k$, $\delta\varepsilon''_k$, $\delta\varepsilon'''_k, \ldots$ Затем получим

$$\delta L = \delta_1 L + \delta_2 L + \delta_3 L + \ldots + \delta_k L,$$

$$\delta L_1 = \delta_1 L_1 + \delta_2 L_1 + \delta_3 L_1 + \ldots + \delta_k L_1,$$

$$\delta L_2 = \delta_1 L_2 + \delta_2 L_2 + \delta_3 L_2 + \ldots + \delta_k L_2 \text{ и т. д.}$$

Это — наибольшая степень простоты в отношении того, что можно сказать вообще об отыскании условий возможных перемещений.

VI. Предположим, например, что нам нужно найти вариацию, которую испытывает элемент объема тела при бесконечно малом перемещении точек этого тела, — задача, которую пришлось решать Лагранжу при рассмотрении равновесия несжимаемых жидкостей.* Нам кажется наиболее простым для этого случая преобразование переменных в тройных интегралах, относящихся к задаче, но мы будем следовать по пути Лагранжа.

Отнесем тело к прямоугольным осям координат x, y, z. Обозначая через $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ координаты точки, бесконечно близкой к точке с координатами x, y, z, мы можем принять $dxdydz$ за тот элемент объема, вариацию которого нам нужно найти. Пусть перемещение точек тела состоит в том, что точки, имевшие координаты x, y, z, имеют теперь координаты $x+\delta x$, y, z. Это будут координаты угла четырехугольника, который до перемещения был прямоугольником $dxdy$ и соответствовал координате z. Три остальных угла четырехугольника после перемещения будут иметь координаты

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx, \; y, \; z;$$

$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy, \; y + dy, \; z;$$

$$x + \delta x + dx + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy, \; y + dy, \; z,$$

откуда мы видим, что четыре угла фигуры заключены в плоскости, параллельной плоскости xy, а так как, кроме того, противополож-

* Méchanique analytique, t. I, стр. 189 и следующие

ные стороны не пересекаются и равны между собой — именно две равны dy, а две другие равны $\delta x + \frac{d\delta x}{dx}dx$, — то отсюда заключаем, что четырехугольник есть параллелограмм. Таким же образом убедимся, что другие прямоугольники, грани параллелепипеда $dxdydz$, останутся параллелограммами после перемещения; поэтому и сам параллелепипед $dxdydz$ останется параллелепипедом, а так как координаты концов ребер этого последнего, ребер, общим началом которых служит точка $(x+\delta x,\ y,\ z)$, соответствуют координатам $x+\delta x+dx+\frac{d\delta x}{dx}dx,\ y,\ z;\ x+\delta x+\frac{d\delta x}{dy}dy,\ y+dy,\ z;\ x+\delta x+\frac{d\delta x}{dz}dz,$ $y,\ z+dz$, то мы найдем сразу, что

$$\left(1+\frac{d\delta x}{dx}\right)dxdydz$$

будет объемом нового параллелепипеда; вычитая этот объем из первого, именно из $dxdydz$, найдем

$$\frac{d\delta x}{dx}dxdydz.$$

Не производя новых вычислений, можно заключить по аналогии, что если бы координаты x, y, z вследствие перемещения обратились в x, $y+\delta y$, z или в x, y, $z+\delta z$, то соответствующие изменения объема были бы $\frac{d\delta y}{dy}dxdydz$ и $\frac{d\delta z}{dz}dxdydz$. Объединяя все три частных вариации

$$\frac{d\delta x}{dx}dxdydz, \quad \frac{d\delta y}{dy}dxdydz, \quad \frac{d\delta z}{dz}dxdydz,$$

найдем полную вариацию

$$\left(\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}+\frac{d\delta z}{dz}\right)dxdydz,$$

соответствующую произвольному перемещению точек тела, при котором координаты x, y, z обращаются одновременно в $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$.

VII. Если бы можно было найти дифференциалы dL, dL_1, dL_2, $dL_3, \ldots$, то рассмотрение вариаций, обозначенных через Δ, стало бы излишним. Чтобы найти эти дифференциалы, нужно только вычислить, во что обратятся величины L, L_1, L_2, $L_3, \ldots$, отнесенные ко времени t, в конце времени $t+dt$; в этом вычислении следует сохранить только первую степень элемента dt, пренебрегая квадратами и более высокими степенями. Разности между значениями величин L, L_1, L_2, $L_3, \ldots$, вычисленными, как сейчас сказано, для момента $t+dt$, и их значениями для момента t дадут соответствующие значения дифференциалов dL, dL_1, dL_2, $dL_3, \ldots$

Итак, как вариации δ, так и дифференциалы d получаются от взаимного и соответственного сравнения величин L, L_1, L_2, $L_3, \ldots$, вычисленных для двух положений системы: одно из них есть положение системы в конце времени t, который является общим для обеих характеристик δ и d; другое положение отвечает для вариации δ тому же времени t, но при допущении, что точки системы находятся на кривых, отличных от тех, которые они описывают на самом деле, а для дифференциалов d — моменту времени $t+dt$. Итак, время изменяется при переходе от первого ко второму положению, что важно при вычислении дифференциалов, но не изменяется при вычислении вариаций δ. Что касается изменений Δ, то для определения их нужно варьировать и время, и описанные кривые; случается, что Δ представляются суммой d и δ, что вполне согласно с природой вариационного исчисления, в силу которой приращения, обусловленные одновременными изменениями как переменных, так и их зависимости, выражаются суммой частных приращений, а именно тех, которые зависят единственно от изменения переменных, и тех, которые зависят единственно от изменения зависимости между теми же переменными.

Поскольку, несомненно, можно придавать вариациям $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ... произвольные значения и направления, предположим, что мы соответственно приравняли их дифференциалам ds, ds', ds'', ds''', ...; это предположение даст

$$\delta L = dL - T dt.$$

Но поскольку $dL=0$, получим

$$\delta L = -Tdt, \quad \delta L_1 = -T_1 dt, \quad \delta L_2 = -T_2 dt, \quad \delta L_3 = -T_3 dt, \ldots, \quad (4)$$

— результат, который следует запомнить.

Мы закончим этот параграф, приведя одно замечание, давно сделанное нами; * оно относится к ошибке, которую допустил автор «Аналитической механики».

Положим, что в силу свойств системы или внешних препятствий некоторая величина L должна оставаться неизменной; тогда будем иметь

$$\delta L = 0$$

для возможных перемещений; пусть другая величина L_1, которая также представляет связь для точек системы, заключает величину L вместе с другими переменными. Будем иметь

$$\delta L_1 = \delta K + \lambda \delta L,$$

где δK представляет ту часть δL_1, в которой L не претерпевает вариации, а $\lambda \delta L$ — другую часть, в которой L изменяется. Лагранж отбрасывает эту последнюю часть $\lambda \delta L$ на том основании, что δL равно нулю. Великий математик упускает из виду, что общее уравнение механики, содержащее вариации δL и δL_1, выведено в предположении, что входящие в него перемещения $\delta\varepsilon, \delta\varepsilon', \delta\varepsilon'', \ldots$ совершенно произвольны, а не только возможны; поэтому в них δL не равно нулю, и, следовательно, член $\lambda \delta L$ необходимо должен быть сохранен. Если его отбросить, это равносильно тому, что условие возможных перемещений $\delta L = 0$ не используется.

Добавим, что, заставляя исчезнуть под знаком интеграла характеристическую комбинацию $d\delta$ с помощью интегрирования по частям, Лагранж опускает члены, которые при этой операции выносятся за знак интеграла, так как эти члены обратились бы в нуль для возможных перемещений; ошибка — совершенно того же рода, как и приведенная выше. Эти члены не равны нулю, ибо

* Mémoires de l'Acad. impériale, t. II, Bull. scient., стр. 1. Заметка о равновесии упругой нити. Доложено 16 мая 1832 г.

относятся к совершенно произвольным перемещениям, которые не дозволено смешивать с возможными перемещениями. Опуская их, мы лишаем себя возможности определить усилия, действующие на препятствия, наличие которых дает условия обращения упомянутых членов в нуль в том случае, если бы мы рассматривали только возможные перемещения, и, таким образом, решение задачи становится неполным.

VIII. Заимствуем общее уравнение движения из нашей работы о возможных перемещениях, цитированной в начале этой статьи.*

Если обозначим через v, v', v'', v''', ... и через P, P', P'', P''', ... соответственно скорости масс m, m', m'', m''', ... в конце времени t и движущие силы, действующие на те же массы в тот же момент времени, если, далее, предположим, что перемещения $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ... составляют соответственно углы ω, ω', ω'', ω''', ... со скоростями и углы φ, φ', φ'', φ''', ... с силами, то упомянутое уравнение будет

$$0=\sum\left(P\cos\varphi\,\delta\varepsilon-m\frac{d_1 v\cos\omega}{dt}\,\delta\varepsilon\right)+\lambda\delta L+\lambda_1\delta L_1+\lambda_2\delta L_2+\lambda_3\delta L_3+\ldots \quad (5)$$

Характеристика d_1 обозначает неполное дифференцирование, при котором, дифференцируя угол ω для получения $d_1\omega$, не следует изменять направления $\delta\varepsilon$, а только направление v; знак Σ распространяется на все массы системы, чтобы выразить сумму всех величин, аналогичных той, которая стоит под этим знаком; эта сумма есть момент потерянных сил. Множители λ, λ_1, λ_2, λ_3, ... — неизвестные, которые всегда можно считать положительными.

Величины $\delta\varepsilon$ в предыдущем уравнении совершенно произвольны, так что это уравнение может иметь место только в случае, если коэффициенты при $\delta\varepsilon$, каждый в отдельности, равны нулю.

Уравнение (5) является основным и для общей теории движения, и для теории удара; мы придадим ему другую форму, кото-

* Mémoires de l'Acad. impériale, t. III, стр. 591, уравнение (18). Нужно восстановить в нем множители δs, $\delta s'$, $\delta s''$, $\delta s'''$, ..., пропущенные наборщиком по ошибке и представляющие собой то, что мы обозначаем в настоящей статье через $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ...

рая даст возможность с той же легкостью вывести из него первую теорию и в то же время будет более удобной для приложений второй. Мы рассматриваем преобразование, приведенное ниже, как дополнение к работе о мгновенных перемещениях.

Заменим член $\frac{d_1 v \cos\omega}{dt}\delta\varepsilon$ в уравнении (5) разностью

$$\frac{d_1 (v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt}.$$

Мы знаем, что для получения $d_1\omega$ нужно изменить в ω только направление v, но отнюдь не направление $\delta\varepsilon$; обозначим через $d_2\omega$ дифференциал ω, относящийся единственно к изменению этого последнего направления, но не направления v; тогда, очевидно, будем иметь $d\omega = d_1\omega + d_2\omega$, откуда $d_1\omega = d\omega - d_2\omega$; это даст нам

$$\frac{d_1 (v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} = \frac{d\,(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt},$$

следовательно,

$$\frac{d_1 (v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d\,(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\left(\cos\omega\frac{d\delta\varepsilon}{dt} + \delta\varepsilon\frac{d_2\cos\omega}{dt}\right),$$

или, наконец,

$$\frac{d_1 (v\cos\omega)}{dt}\delta\varepsilon = \frac{d\,(v\cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\frac{d_2\,\delta\varepsilon\cos\omega}{dt}.$$

Дифференциал d_2 — неполный, ибо в $d_2\omega$ нужно заменить лишь направление $\delta\varepsilon$, но отнюдь не направление v.

Вернемся к соображениям, изложенным в начале параграфа IV. Если скорость точки m, т. е. точки, в которой начинается $\delta\varepsilon$, есть v, то $v+\delta v$ представит скорость конечной точки $\delta\varepsilon$; следовательно, в то время как m пройдет расстояние ds, или vdt, эта точка опишет прямую $(v+\delta v)\,dt$, и так как в конце времени $t+dt$ она будет находиться на расстоянии $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$ от m, то четыре бесконечно малые прямые vdt, $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon$ и $(v+\delta v)\,dt$ образуют четыре стороны четырехугольника. Следовательно, сумма проекций двух первых сторон на любое направление будет равна сумме проекций двух других сторон на то же направление. Взяв

за линию проекций направление v и обозначая через $\tilde{\omega}$ угол между v и $v+\delta v$, получим

$$vdt + (\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + (v+\delta v)\cos\tilde{\omega}\,dt,$$

откуда вследствие $(\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon)\cos(\omega + d_2\omega) = \delta\varepsilon\cos\omega + d_2(\delta\varepsilon\cos\delta\omega)$,

$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = (v+\delta v)\cos\tilde{\omega}\,dt - vdt.$$

Эта формула показывает нам, что угол $\tilde{\omega}$ должен быть бесконечно малым: * впрочем, легко убедиться в этом. Итак, заменяя $\cos\tilde{\omega}$ через единицу, найдем

$$d_2(\delta\varepsilon\cos\omega) = \delta v dt\ [^1],$$

или

$$\frac{d_2(\delta\varepsilon\cos\omega)}{dt} = \delta v.$$

Если представление о том, что угол $\tilde{\omega}$ бесконечно мал, не усваивается непосредственно, мы его поясним. Проведем через окопечность $\delta\varepsilon$ прямую в том же направлении, что и v, и равную vdt; затем замкнем четырехугольник. Эта фигура, у которой две стороны параллельны, причем каждая из них равна vdt и обе лежат по одну сторону $\delta\varepsilon$, будет параллелограммом; поэтому четвертая сторона, которую мы провели, чтобы замкнуть фигуру, будет параллельна и равна $\delta\varepsilon$. Но если мы соединим концы этой четвертой стороны и $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, то получим треугольник, в котором третья сторона, та, которой мы соединили концы двух других, будет бесконечно малой второго порядка, потому что $\delta\varepsilon$ непрерывно изменяется по величине и направлению и, стало быть, угол, заключенный между этой прямой и $\delta\varepsilon + d\delta\varepsilon$, будет бесконечно малым. Эта третья сторона, представляющая бесконечно малую второго порядка, является в то же время третьей стороной другого треугольника, двумя другими сторонами которого будут $(v+\delta v)\,dt$ и vdt; последняя есть та прямая, которую мы провели через конец $\delta\varepsilon$ в направлении скорости v. Поскольку угол $\tilde{\omega}$ заключен

* Ибо член, умноженный на dt, должен исчезнуть как несравнимый с характеристической комбинацией $d\delta$.

между этими сторонами, которые являются бесконечно малыми первого порядка, и противолежит стороне, являющейся бесконечно малой второго порядка, он необходимо будет бесконечно малым.

Заменяя $\frac{d_2 \delta\varepsilon \cos\omega}{dt}$ через δv, получим

$$\frac{d_1 (v \cos\omega)\,\delta\varepsilon}{dt} = \frac{d\,(v \cos\omega\,\delta\varepsilon)}{dt} - v\delta v,$$

поэтому уравнение (5) обратится в

$$\frac{d \sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon}{dt} = \delta\frac{\sum mv^2}{2} + \sum P\cos\varphi\,\delta\varepsilon + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \ldots \quad (6)$$

Значение этого уравнения можно формулировать весьма просто, но сначала рассмотрим значение входящего в него выражения

$$\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots$$

Подставив вместо всех δL их значения $a\cos\theta\,\delta\varepsilon + a'\cos\theta'\,\delta\varepsilon' + \ldots$ и пользуясь знаком суммирования $\sum$, получим это выражение в виде

$$\sum(\lambda a\cos\theta\,\delta\varepsilon + \lambda_1 a_1\cos\theta_1\,\delta\varepsilon + \lambda_2 a_2\cos\theta_2\,\delta\varepsilon + \lambda_3 a_3\cos\theta_3\,\delta\varepsilon + \ldots);$$

итак, оно имеет тот же вид, что и член $\sum P\cos\varphi\,\delta\varepsilon$ уравнения (6), зависящий от движущих сил, и потому может быть отнесено к силам, конечно воображаемым, но величины и направление которых можно сразу найти. Те силы, которые нужно предположить действующими на точку m, будут равны по величине

$$\lambda a,\ \lambda_1 a_1,\ \lambda_2 a_2,\ \lambda_3 a_3, \ldots$$

и будут совпадать по направлениям с D, D_1, D_2, $D_3, \ldots$ Подобные же силы мы будем считать приложенными к другим точкам системы, и их совокупность даст в уравнении движения тот же член, который был введен в уравнение (6) вследствие реального наличия связей и препятствий, стесняющих перемещение системы. Таким образом, движение масс m, m', m'', m''', ..., которое мы рассматриваем, дается тем же уравнением, как и в том случае, если бы эти массы были бы совершенно свободны, т. е. без какой-

либо взаимной связи или внешнего препятствия, стесняющего их перемещение; необходимо только, чтобы, кроме соответственных сил P, P', P'', P''', ..., на них действовали также только что упомянутые силы. По этой причине последние называются силами, заменяющими связи, или просто силами связи; сумма

$$\sum (\lambda a \cos\theta\, \delta\varepsilon + \lambda_1 a_1 \cos\theta_1\, \delta\varepsilon + \lambda_2 a_2 \cos\theta_2\, \delta\varepsilon + \ldots)$$

или же сумма

$$\lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \lambda_2 \delta L_2 + \lambda_3 \delta L_3 + \ldots$$

представляет их момент.

Теперь мы можем формулировать уравнение (6) так: *вариация живой силы плюс момент движущих сил, плюс момент сил связи составляют производную по времени от момента количества движения системы.*

Эту формулировку можно упростить; достаточно сказать: *вариация живой силы плюс момент движущих сил, плюс момент сил связи составляют полную производную по времени.*

Излишне добавлять, к какой величине относится эта производная; ибо при взгляде на сумму, которую мы назвали полной производной, ясно, что эта последняя, т. е. производная, необходимо будет относиться к моменту количества движения системы. Мы опускаем доказательство этого предложения; его легко восстановить, ибо оно является лишь воспроизведением — в обратном смысле — того преобразования, которое нас привело от уравнения (5) к уравнению (6).

Прежде чем перейти к основному вопросу нашей работы, укажем еще, каким образом данная выше формулировка приводит в каждом случае к уравнениям движения, не скажу наиболее простым, но тем, которые мы пожелаем применить. Простота и удобство уравнений зависят от подходящего выбора координат, которые мы возьмем для определения положения системы в каждый момент; по этому вопросу нельзя дать никаких общих указаний, ибо каждому частному случаю будут отвечать наиболее подходящие для него координаты, которые, однако, нельзя будет вообще с удоб-

ством применить к другим случаям. Обратная задача, т. е., выбрав координаты, выявить случаи, когда они дают простое решение, представляется менее трудной. Мы будем иметь в виду этот вопрос, чтобы рассмотреть его в дальнейшем.

Обозначим через ξ, η, ζ координаты, которые мы хотим применить, считая их наиболее пригодными для рассматриваемой нами системы. Введем эти координаты как в сумму моментов

$$\sum P\cos\varphi\,\delta\varepsilon+\lambda\delta L+\lambda_1\delta L_1+\lambda_2\delta L_2+\ldots,$$

так и в живую силу $\frac{\sum mv^2}{2}$, которую для сокращения обозначим через T. В силу этой подстановки сумма моментов примет вид

$$X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+\ldots,$$

где X, Y, $Z,\ldots$ — функции времени координат ξ, η, $\zeta,\ldots$, заключающие в линейной форме неизвестные λ, λ_1, λ_2, λ_3, ..., так что выражение, которое должно быть полной производной, будет

$$\delta T+X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+\ldots$$

Обозначив для удобства производные $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt},\ldots$ через ξ', η', $\zeta',\ldots$, получим

$$\delta T=\frac{dT}{d\xi}\delta\xi+\frac{dT}{d\eta}\delta\eta+\frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta+\ldots+\frac{dT}{d\xi'}\delta\xi'+\frac{dT}{d\eta'}\delta\eta'+\frac{dT}{d\zeta'}\delta\zeta'+\ldots$$

или, положив для сокращения

$$\frac{dT}{d\xi'}=p,\qquad \frac{dT}{d\eta'}=q,\qquad \frac{dT}{d\zeta'}=r,\ldots,$$

получим

$$\delta T=\frac{dT}{d\xi}\delta\xi+\frac{dT}{d\eta}\delta\eta+\frac{dT}{d\zeta}\delta\zeta+\ldots+p\delta\xi'+q\delta\eta'+r\delta\zeta'+\ldots,$$

или же

$$\delta T=\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+\ldots)+\left(\frac{dT}{d\xi}-\frac{dp}{dt}\right)\delta\xi+\left(\frac{dT}{d\eta}-\frac{dq}{dt}\right)\delta\eta+$$
$$+\left(\frac{dT}{d\zeta}-\frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta.$$

Подставляя это значение в выражение, которое должно быть полной производной по времени, получим его в виде

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+\ldots)+\left(X+\frac{dT}{d\xi}-\frac{dp}{dt}\right)\delta\xi+\left(Y+\frac{dT}{d\eta}-\frac{dq}{dt}\right)\delta\eta+$$
$$+\left(Z+\frac{dT}{d\zeta}-\frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta+\ldots,$$

и чтобы оно было полной производной, необходимо иметь

$$0=\left(X+\frac{dT}{d\xi}-\frac{dp}{dt}\right)\delta\xi+\left(Y+\frac{dT}{d\eta}-\frac{dq}{dt}\right)\delta\eta+\left(Z+\frac{dT}{d\zeta}-\frac{dr}{dt}\right)\delta\zeta+\ldots, \quad (A)$$

ибо тогда, и только тогда, это выражение, которое сведется к

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+\ldots),$$

будет, очевидно, полной производной.

Итак,

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\zeta+\ldots)=\delta T+X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+\ldots \text{ [2]}.$$

Равенство (A) могло бы дать уравнения движения, но они не были бы наиболее простыми, и потому мы на нем не останавливаемся, хотя это равенство и дает повод к некоторым любопытным замечаниям.

Заменим в последнем уравнении производную

$$\frac{d}{dt}(p\delta\xi+q\delta\eta+r\delta\xi+\ldots)$$

эквивалентным выражением

$$\delta(p\xi'+q\eta'+r\zeta'+\ldots)+\frac{dp}{dt}\delta\xi+\frac{dq}{dt}\delta\eta+\frac{dr}{dt}\delta\zeta+$$
$$+\ldots-\xi'\delta p-\eta'\delta q-\zeta'\delta r\ldots$$

и положим для сокращения

$$T-p\xi'-q\eta'-r\zeta-\ldots=\theta;$$

тогда будем иметь

$$\frac{dp}{dt}\delta\xi+\frac{dq}{dt}\delta\eta+\frac{dr}{dt}\delta\zeta+\ldots-\xi'\delta p-\eta'\delta q-\zeta'\delta r\ldots=$$
$$=\delta\theta+X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+\ldots$$

Исключаем из θ производные ξ', η', $\zeta'\ldots$ при помощи уравнений

$$\frac{dT}{d\xi'}=p,\quad \frac{dT}{d\eta'}=q,\quad \frac{dT}{d\zeta'}=r,\ldots,$$

и последняя формула будет уравнением движения в самой простой форме, но, конечно, самой простой в тех координатах, которые вы выбрали; она может быть разложена и даст уравнения

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d\theta}{d\xi}+X,$$
$$\frac{dq}{dt}=\frac{d\theta}{d\eta}+Y,$$
$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\theta}{d\zeta}+Z,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{d\xi}{dt}=-\frac{d\theta}{dp},$$
$$\frac{d\eta}{dt}=-\frac{d\theta}{dq},$$
$$\frac{d\zeta}{dt}=-\frac{d\theta}{dr},$$
$$\ldots\ldots$$

Заметим, что θ чаще всего будет равно живой силе T, взятой со знаком минус.

Решение задачи, относящейся к движению системы, сведется к решению последних уравнений и следующих:

$$0=dL,\ 0=dL_1,\ 0=dL_2,\ 0=dL_3\ldots$$

IX. Предположим, что в конце времени t движущие силы весьма большой интенсивности вдруг прилагаются к системе, но действуют лишь в продолжение весьма короткого времени τ и что в то же время происходят резкие изменения в связях системы,

так как одни из них уничтожаются, а другие вновь устанавливаются.

Движущая сила весьма большой интенсивности и весьма малой продолжительности нередко носит название импульсивной силы. Идея подобного усилия не заключает в себе ничего неясного, название не изменяет природы объекта, и импульсивная сила всегда остается обыкновенной движущей силой, т. е. относится к тем силам, какие рассматривает механика независимо от их интенсивности и продолжительности их действия.

Но мы полагаем, что нам следует дать некоторые пояснения по поводу изменений в связях системы. Мы изложим сначала несколько соображений относительно связей особого рода.

Пусть среди величин $L, L_1, L_2, L_3, \ldots$, относительно которых мы предположили, что они не могут убывать, имеется одна, допустим первая, которая все-таки стала бы убывать вследствие достаточного усилия, как это имело бы место для объема упругой жидкости вследствие давления. Но убывание L необходимо требует внешнего усилия, или, лучше сказать, величина L по своей природе оказывает сопротивление своему уменьшению, но такое сопротивление, которое можно преодолеть.

Это обстоятельство нужно принимать во внимание, хотя Лагранж в своей «Механике» его не рассматривал; оно представляет препятствие перемещению, правда не непреодолимое, но все же препятствие, которым нельзя пренебречь. Сопротивление величины L уменьшению даст момент $\lambda\delta L$, который нужно будет прибавить к моментам других сил, так же как и в случае, если бы эта величина совсем не могла уменьшаться. Но этот последний случай, т. е. невозможность убывания L, требует еще, как мы видели, чтобы имело место уравнение $dL=0$, которое теперь, когда L может уменьшаться, уже не будет выполняться; оно заменится неравенством

$$dL < 0.$$

Момент $\lambda\delta L$ придется прибавить к моментам других сил системы также и в случае, когда величина L не может измениться, т. е. не может ни увеличиться, ни уменьшиться без усилия извне, но

может уступить достаточному усилию. В этом случае уравнение $dL=0$ также не будет иметь места.

Вернемся теперь к нашей задаче. Из теории движущих сил известно, что скорость никогда не может претерпеть вполне внезапного изменения, т. е. никогда не может перейти сразу от одного значения к другому, значительно от него отличающемуся. То, что обычно называют резким изменением скорости, есть лишь очень быстрое, или очень сильное, изменение за крайне малое время, но никогда скорость не меняется без изменения времени. Это зависит от того, что скорости меняются только под влиянием движущих сил; но действие этих последних — какова бы ни была их природа — всегда удовлетворяет закону непрерывности, хотя они сами не могут не подчиняться этому закону.

Установив это, допустим, что в конце времени t в системе появляется связь, состоящая, например, в невозможности убывания некоторой величины L. В то же мгновение движущие силы внезапно изменятся, и их момент получит мгновенное приращение $\lambda\delta L$. Но если скорости системы в конце времени t не будут в точности те, которые удовлетворяют уравнению $dL=0$, то это уравнение не будет иметь места; будем иметь $dL<0$. Обратное предположение привело бы к совершенно внезапному изменению скоростей, которое признано невозможным. Мы должны заключить отсюда, что физические связи, посредством которых мы стремились бы создать сразу абсолютное препятствие уменьшению величины L, невозможны. Итак, эта величина будет убывать до тех пор, пока скорости, изменяясь весьма быстро, не удовлетворят уравнению $L=0$, что и произойдет по прошествии весьма малого промежутка времени; но как бы он ни был мал, изменения скорости, вообще весьма быстрые, будут необходимо удовлетворять закону непрерывности.

Как только уравнение $dL=0$ установится, величина L достигнет своего минимума, и действие удара, вызванное введением связи $L=\text{minimum}$, прекратится.

Уничтожение какой-либо связи в системе также может дать начало удару, если были приложены весьма большие усилия для

нарушения этой связи, что чаще всего будет иметь место при импульсивных силах.

Заметим кстати, что если мы рассматриваем движение системы, исходя из начальных значений, то нужно, чтобы эти значения удовлетворяли связям системы, иначе удар получится в самом начале движения.

Уравнение

$$\frac{d\sum mv\cos\omega\,\delta\varepsilon}{dt}=\delta\frac{\sum mv^2}{2}+\sum P\cos\varphi\,\delta\varepsilon+\lambda\delta L+\lambda_1\delta L_1+\lambda_2\delta L_2+\ldots \quad (6)$$

будет приложимо в любой момент времени τ, по предположению весьма малый, который следует за изменениями, произведенными в системе, если только в число сил системы мы включаем те силы, которые вновь к ней приложены, а в число связей — те, которые вновь в нее введены, и если отбрасываем те связи, которые перестали стеснять систему.

Вследствие того, что значение времени τ весьма мало, можно предположить, что за это время массы m, m', m'', m''', ... переместятся лишь весьма незначительно; и, следовательно, все, что будет зависеть от положения системы, можно считать не изменившимся за этот промежуток времени. Так, перемещения $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ..., углы, составляемые ими с направлениями, которые были обозначены через D со значками и цифрами, коэффициенты, содержащиеся в дифференциалах δL, δL_1, δL_2, δL_3, ..., сами эти дифференциалы могут быть рассматриваемы как неизменные от t до $t+\tau$.

Рассмотрим теперь вариацию живой силы

$$\frac{\delta\sum' mv^2}{2}=\sum mv\delta v.$$

Мы видели, что

$$\delta v=\frac{d_2(\delta\varepsilon\cos\omega)}{dt},$$

где d_2, как читатель, очевидно, помнит, обозначает дифференциал, в котором угол ω изменяется лишь в зависимости от изменения

направления $\delta\varepsilon$; таким образом, дифференциал $d_2(\delta\varepsilon \cos\omega)$ отнюдь не относится к изменению v, а только к изменению $\delta\varepsilon$. Но так как перемещение $\delta\varepsilon$ не изменяется заметным образом, будем иметь $d_2(\delta\varepsilon \cos\omega) = 0$, и уравнение (6) обратится в

$$\frac{d}{dt}\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum P \cos\varphi\,\delta\varepsilon + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots$$

Заметьте хорошенько, что это последнее уравнение было бы вполне точным, если бы вариации $\delta\varepsilon$ не изменялись в зависимости от времени ни по величине, ни по направлению.

Посмотрим теперь, что произошло бы с системой, если бы в конце времени t или в начале τ все связи и препятствия уничтожились, но те же движущие силы — в точности те же — продолжали действовать в течение времени τ. Ясно, что последнее уравнение имело бы место при этом предположении, если бы мы опустили член

$$\lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots,$$

зависящий от связей и препятствий, которых, как мы предположили, теперь не существует, и если бы представили в нем скорости иными буквами, чем v; что же касается суммы $\sum P \cos\varphi\,\delta\varepsilon$, то она будет общей и для действительной системы, и для рассматриваемой нами гипотезы.

Таким образом, обозначая через u, u', u'', u''', ... скорости, которыми обладали бы массы m, m', m'', m''', ... в предположении, что они совершенно свободны от всех связей и препятствий, но подчинены силам P, и через σ, σ', σ'', σ''', ... — углы, образуемые этими скоростями соответственно с отрезками $\delta\varepsilon$, получим

$$\frac{d}{dt}\sum mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon = \sum P \cos\varphi\,\delta\varepsilon.$$

Заменим в уравнении, относящемся к реальной системе, член $\sum P \cos\varphi\,\delta\varepsilon$ его найденным значением; тогда

$$\frac{d}{dt}\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \frac{d}{dt}\sum mu \cos\sigma + \lambda\delta L + \lambda_1\delta L_1 + \lambda_2\delta L_2 + \lambda_3\delta L_3 + \ldots$$

Умножая на dt, интегрируя по времени от его значения t до $t+\xi$, где ξ — промежуток времени, меньший чем τ или равный ему, и принимая во внимание, что в начале этого времени скорости v соответственно совпадают по величине и по направлению со скоростями u, будем иметь

$$\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon + \delta L \int_t^{t+\xi} \lambda dt +$$

$$+ \delta L_1 \int_t^{t+\xi} \lambda_1 dt + \delta L_2 \int_t^{t+\xi} \lambda_2 dt + \ldots$$

или, положив для сокращения

$$\int_t^{t+\xi} \lambda dt = \nu, \quad \int_t^{t+\xi} \lambda_1 dt = \nu_1, \quad \int_t^{t+\xi} \lambda_2 dt = \nu_2, \quad \int_t^{t+\xi} \lambda_3 dt = \nu_3, \ \ldots$$

$$\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + \ldots \quad (7)$$

Это — общее уравнение, относящееся к теории удара.

X. В теории движущих сил предполагается известным наиболее простое действие этих сил, которое они оказали бы на отдельные массы, если бы оставались неизменными, и из него выводится их действие в самом сложном случае, при любых свойствах сил и системы, на которую они действуют. Точно так же в теории удара нужно рассматривать как известные и заданные наиболее простые действия импульсивных сил и стараться свести к ним все другие действия, каковы бы ни были импульсы и система, их воспринимающая. Но как для обычных движущих сил, так и для импульсов нет ничего проще их действий на изолированные точки; поэтому мы будем предполагать именно это действие известным в теории удара. Следует отметить, что эта теория даже проще, чем теория движущих сил. Именно, действием движущих сил, которое считается наиболее простым, будет не только действие, оказываемое на изолированную массу,

но нужно еще допустить, что сама рассматриваемая сила не изменяется. Между тем в теории удара такое предположение излишне; изменяется ли импульсивная сила, или нет, достаточно, чтобы был известен полный эффект, оказываемый ею на изолированную точку, т. е. тот эффект, который она производит за все предполагаемое весьма малым время своего действия.

Этот эффект, называемый ударом, состоит лишь в резком, или, вернее, весьма быстром изменении скорости; нужно, чтобы это изменение или полная скорость, составленная из той, которая имела место в начале импульса, и той, какая была приобретена в результате импульса, были известны для каждой точки системы.

Итак, в уравнении (7) мы можем считать заданными скорости u, u', u'', u''', ...: это — соответственно равнодействующие начальных скоростей, действующих в системе непосредственно перед импульсом, и скоростей, которые импульсивные силы придали бы массам m, m', m'', m''', ... в предположении, что они изолированы, т. е. лишены взаимных связей или препятствий. Задача состоит в том, чтобы найти, во что обратятся начальные скорости в результате действия тех же импульсов на те же массы m, m', m'', m''', ..., но в предположении, что эти последние составляют систему, подчиненную каким-либо связям и стесненную внешними препятствиями. Это — те скорости, которые массы системы приобретут после удара; они обозначены через v, v', v'', v''', ... в уравнениях (2) и (7).

Мы видели ранее, что среди уравнений (7) имеются такие, которые устанавливаются только в конце удара или в конце времени τ; вследствие этого, хотя уравнение (7) имеет место в каждый момент времени τ, было бы невозможно определить скорости, которыми обладали бы массы m, m', m'', m''', ... ранее конца удара, ибо поскольку некоторых из уравнений (2) недостает, у нас нет достаточного числа данных для нахождения значений этих скоростей. Мы будем заниматься только скоростями в конце удара, т. е. в момент, когда будут установлены все уравнения (2); тогда, объединив их с формулой (7), в которой положим $\xi = \tau$, мы будем иметь все необходимое для полного решения задачи.

Если бы мы желали иметь не полные скорости v, v', v'', v''', ..., составленные из начальных скоростей и из скоростей, обусловленных ударом, а только эти последние, то уравнения (2) и (7) могут дать также и их. Действительно, обозначим через β, V и U скорости для массы m: начальную, непосредственно предшествующую удару и обусловленную только ударом, которая, будучи сложена с β, дала бы v и которую нам и нужно найти; и, наконец, ту, которая получилась бы от импульсивной силы, действующей на массу m, причем эта последняя предполагается свободной и изолированной; вместе с β она дала бы скорость u.

Те же буквы β, V и U с соответствующими значками представят аналогичные силы для других масс m, m', m'', m''', ... системы.

Сложение скоростей дает нам

$$v\cos\omega = \beta\cos\gamma + V\cos\eta,$$

$$u\cos\sigma = \beta\cos\gamma + U\cos\zeta,$$

буквы γ, η и ζ обозначают углы, образуемые скоростями β, V и U с $\delta\varepsilon$; соответствующие значки дадут нам возможность использовать те же буквы в применении к скоростям масс m', m'', m''', ... и направлениям $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ...

Подставляя в формулу (7) предыдущие значения $v\cos\omega$ и $u\cos\sigma$ и сокращая члены, которые взаимно уничтожаются, найдем

$$\sum mV\cos\eta\,\delta\varepsilon = \sum mU\cos\zeta\,\delta\varepsilon + \nu\delta L + \nu_1\delta L_1 + \nu_2\delta L_2 + \nu_3\delta L_3 + \ldots \quad (8)$$

Нужно также заменить в уравнении (2) скорости v их значениями в зависимости от β и V. Возьмем одно из этих уравнений, например первое, $dL = 0$ или

$$\sum av\cos\alpha + T = 0,$$

где буква α обозначает в нем угол, образуемый v с направлением D, и так как

$$v\cos\alpha = V\cos\widehat{DV} + \beta\cos\widehat{D\beta},$$

получим после подстановки

$$0=\sum aV\cos\widehat{DV}+\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T,$$

или, полагая для краткости $\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T=\Pi$,
имеем

$$0=\sum aV\cos\widehat{DV}+\Pi.$$

Мы пользуемся принятым обозначением, согласно которому угол между какими-либо двумя направлениями a и b пишется $\widehat{ab}$.

Все уравнения (2), как и первое, дают путем аналогичных подстановок подобные же результаты, и получаем поэтому

$$\left.\begin{aligned}&\sum aV\cos\widehat{DV}+\Pi=0,\\&\sum a_1V\cos\widehat{D_1V}+\Pi_1=0,\\&\sum a_2V\cos\widehat{D_2V}+\Pi_2=0,\\&\sum a_3V\cos\widehat{D_3V}+\Pi_3=0,\\&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Мы положили для сокращения

$$\left.\begin{aligned}&\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T=\Pi,\\&\sum a_1\beta\cos\widehat{D_1\beta}+T_1=\Pi_1,\\&\sum a_2\beta\cos\widehat{D_2\beta}+T_2=\Pi_2,\\&\sum a_3\beta\cos\widehat{D_3\beta}+T_3=\Pi_3,\\&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Следует далее различать два рода связей: те, которые имели место до появления импульсивных сил, или до удара, и которые существуют во время их действия, и те, которые устанавливаются в конце времени t, т. е. в самый момент, когда начинается удар,

и которые являются одной из его причин. Если бы, например, $dL=0$, или

$$0=\sum av\cos\alpha+T=\sum aV\cos\widehat{DV}+\Pi,$$

относилось к связям первого рода, то величина П, т. е.

$$\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T,$$

была бы равна нулю, ибо величины β, представляющие действительные скорости в конце времени t, необходимо будут удовлетворять уравнению

$$0=\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T=\Pi,$$

которое принадлежит к уравнениям, определяющим те же скорости. Но если бы $dL=0$, или

$$0=\sum av\cos\alpha+T=\sum aV\cos\widehat{DV}+\Pi,$$

относилось к связи, установленной в тот самый момент, когда начинается удар, то величина П, или

$$\sum a\beta\cos\widehat{D\beta}+T,$$

не была бы равна нулю.

Таким образом, можно опустить величины П как равные нулю в тех из уравнений (9), которые относятся к связям, установленным до конца времени t, но нужно сохранить эти величины в уравнениях, которые относятся к связям, введенным в начале или в продолжение удара. Мы уже сказали и повторяем снова, что эти последние уравнения устанавливаются лишь к концу удара, когда прекратятся резкие изменения скоростей, обусловленные связями, которые порождают эти самые уравнения.

Уравнения (8) и (9) послужат для определения скоростей V, происходящих единственно от удара, т. е. они дадут резкие изменения скоростей, вызванные импульсивными силами и изменением в связях, не включая сюда скоростей β, предшествующих удару. Эти уравнения вполне сходны с формулами (7) и (2),

которые содержат полные скорости v, слагающиеся из β и из V. Мы будем заниматься лишь этими последними формулами, и когда мы найдем из них неизвестные v, мы определим скорости V простой заменой соответственно u и T на U и П.

XI. Всякая скорость v, если нужно определить ее по величине и направлению, требует, чтобы мы знали три ее проекции на известные направления, не параллельные одной и той же плоскости; итак, на каждую скорость приходится три неизвестных; поэтому, если n означает число масс m, m', m'', m''', ... и тем самым число скоростей v, v', v'', v''', ..., то нам предстоит найти $3n$ неизвестных. Но уравнение (7) содержит сверх того и другие неизвестные, именно величины ν; их столько же, сколько и уравнений (2). Обозначив через f число этих последних, будем иметь всего $3n+f$ неизвестных. Что касается уравнений, их определяющих, то мы имеем f формул (2); далее, уравнение (7), содержащее произвольные величины $\delta\varepsilon$, распадется на несколько уравнений; нужно узнать их число.

Приравнивая между собой коэффициенты при $\delta\varepsilon$ в обеих частях уравнения (7), получим n формул, так как мы имеем столько же величин $\delta\varepsilon$; но каждая из этих формул, поскольку она относится к абсолютно произвольному направлению — направлению соответствующего $\delta\varepsilon$, даст бесконечное количество уравнений, если мы будем последовательно придавать отрезкам $\delta\varepsilon$ различные произвольные направления. Однако легко убедиться, да это, впрочем, известно, что если последовательно совместить направление какого-либо $\delta\varepsilon$ с тремя направлениями, не параллельными одной и той же плоскости, то три уравнения, которые отсюда получатся, будут заключать в себе все те, которые можно получить при всех других предположениях относительно направления того же самого $\delta\varepsilon$. Таким образом, каждая из n формул, которые мы получим, приравнивая между собой коэффициенты при $\delta\varepsilon$ в уравнении (7), даст только три различных уравнения, а потому мы можем считать вместо (7) $3n$ уравнений; прибавляя к ним f формул (2), получим всего $3n+f$ уравнений, т. е. столько, сколько неизвестных.

Нахождение этих неизвестных облегчается самой формой уравнений, их определяющих. Действительно, приравнивая между собой коэффициенты при $\delta\varepsilon$ в обеих частях уравнения (7), вы сразу же выразите проекции скоростей v на любые направления через неизвестные v; исключите затем из формул (2) проекции скоростей, заменив их в этих формулах их выражениями в зависимости от v, и вы получите f уравнений, которые будут содержать только f неизвестных ν; решение этих уравнений даст вам эти ν; затем, определив их, вы получите проекции скоростей v на произвольные направления, а следовательно, и сами скорости простой подстановкой значений ν в выражения проекций. Таким образом, собственно говоря, вместо $3n+f$ уравнений, содержащих $3n+f$ неизвестных, нам придется решать только f уравнений с f неизвестными ν.

Эти последние уравнения можно получить еще проще, чем показано выше, поступая следующим образом.

Напишем уравнения (2) в форме, весьма удобной для нашей цели:

$$\left.\begin{aligned} &\sum av\cos Dv + T = 0, \\ &\sum a_1 v\cos \widehat{D_1 v} + T_1 = 0, \\ &\sum a_2 v\cos \widehat{D_2 v} + T_2 = 0, \\ &\sum a_3 v\cos \widehat{D_3 v} + T_3 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Затем припишем величинам $\delta\varepsilon$ последовательные и одновременные значения, при которых первый член $\sum mv\cos\omega\,\delta\varepsilon$ в формуле (7) будет последовательно совпадать с каждой из сумм $\sum$, входящих в только что написанные уравнения; если, наконец, заменим все $\sum$, введенные таким образом в формулу (7), величинами T, взятыми со знаком минус, то мы получим уравнения, которые будут содержать только неизвестные ν и которые нам и нужно было получить.

Заметьте хорошенько, что в формуле (7) вы можете приписать вариациям $\delta\varepsilon$ конечные значения, ибо общий множитель, который сделал бы их бесконечно малыми, исчез бы сам собою из этой формулы.

Чтобы заставить $\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon$ совпадать с суммой $\sum a_k v \cos \widehat{D_k v}$, заключающей все те суммы, которые только что были написаны, нам нужно только приписать перемещениям $\delta\varepsilon$, $\delta\varepsilon'$, $\delta\varepsilon''$, $\delta\varepsilon'''$, ... соответственно направления D_k, D'_k, D''_k, D'''_k, ... и предположить, что эти перемещения соответственно пропорциональны или даже равны, в силу сделанного ранее замечания, величинам

$$\frac{a_k}{m},\quad \frac{a'_k}{m'},\quad \frac{a''_k}{m''},\quad \frac{a'''_k}{m'''},\ \ldots$$

Из этого предположения следует

$$\sum mv \cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum a_k v \cos\widehat{D_k v} = -T_k,$$

$$\sum mu \cos\sigma\,\delta\varepsilon = \sum a_k u \cos\widehat{D_k u},$$

$$\delta L_i = \frac{a_i a_k}{m}\cos D_i D_k + \frac{a'_i a'_k}{m'}\cos\widehat{D'_i D'_k} + \frac{a''_i a''_k}{m''}\cos\widehat{D''_i D''_k} + \ldots,$$

и в случае $i = k$

$$\delta L_k = \frac{a_k^2}{m} + \frac{a'^2_k}{m'} + \frac{a''^2_k}{m''} + \frac{a'''^2_k}{m'''} + \ldots$$

Уравнение (7), если положим

$$A_{i,k} = \frac{a_i a_k}{m}\cos\widehat{D_i D_k} + \frac{a'_i a'_k}{m'}\cos\widehat{D'_i D'_k} + \frac{a''_i a''_k}{m''}\cos\widehat{D''_i D''_k} + \ldots, \qquad (11)$$

или, для краткости,

$$A_{i,k} = \sum \frac{a_i a_k}{m}\cos\widehat{D_i D_k}, \qquad (11)$$

$$A_{k,k} = \sum \frac{a_k^2}{m}, \qquad (12)$$

обратится в

$$0 = T_k + \sum a_k u \cos \widehat{D_k u} + A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + A_{3,k}\nu_3 + \ldots$$

или, полагая

$$\sum a_k u \cos \widehat{D_k u} + T_k = -X_k, \tag{13}$$

найдем

$$A_{0,k}\nu + A_{1,k}\nu_1 + A_{2,k}\nu_2 + \ldots + A_{f-1,k}\nu_{f-1} = X_k. \tag{14}$$

Значок k может принимать все значения $0, 1, 2, 3, \ldots, f-1$, где f обозначает, как и раньше, число связей системы или число величин ν.

XII. Дифференцируя предыдущее выражение X_k по ν_i, получим

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = A_{i,k},$$

а если бы мы продифференцировали по ν_k значение X_i, которое мы нашли бы путем замены k через i в уравнении (14), то мы имели бы

$$\frac{dX_i}{d\nu_k} = A_{k,i};$$

но, согласно формуле (11), очевидно,

$$A_{i,k} = A_{k,i},$$

следовательно,

$$\frac{dX_k}{d\nu_i} = \frac{dX_i}{d\nu_k};$$

из этого вытекает, что выражение

$$Xd\nu + X_1 d\nu_1 + X_2 d\nu_2 + \ldots + X_{f-1} d\nu_{f-1}$$

есть полный дифференциал, а так как коэффициенты X — однородные функции переменных ν одного измерения, то один из интегралов этого уравнения будет

$$\frac{X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1}}{2}.$$

Обозначив этот интеграл через θ, получим уравнение

$$\frac{d\theta}{d\nu_k} = X_k, \tag{14}$$

которое мы обозначаем цифрой (14), ибо оно сводится к тому, которое уже обозначено этой цифрой. Само собой разумеется, что все величины X в θ должны быть заменены их значениями, выраженными через ν, ν_1, ν_2, ν_3, $\ldots$, ν_{f-1}.

Дифференцируя уравнение

$$X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1} = 2\theta, \tag{15}$$

имеем

$$Xd\nu + X_1 d\nu_1 + X_2 d\nu_2 + \ldots + \nu dX + \nu_1 dX_1 + \nu_2 dX_2 + \ldots = 2d\theta;$$

но

$$Xd\nu + X_1 d\nu_1 + X_2 d\nu_2 + \ldots + X_{f-1} d\nu_{f-1} = d\theta,$$

отсюда

$$\nu dX + \nu_1 dX_1 + \nu_2 dX_2 + \ldots + \nu_{f-1} dX_{f-1} = d\theta,$$

и, следовательно, рассматривая θ как функцию одних только величин X, получим

$$\nu_k = \frac{d\theta}{dX_k}.$$

Таким образом, неизвестные ν можно было бы найти сразу, если бы было известно θ в функции величин X. Но поскольку такое определение θ оказывается не более легким, чем решение уравнений (14), дающих величины ν, то мы займемся этим решением.

Обозначим через Δ определитель f^2 величин

$$\begin{array}{l}
A_{0,0},\ A_{1,0},\ A_{2,0},\ A_{3,0},\ \ldots,\ A_{f-1,0},\\
A_{0,1},\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ A_{3,1},\ \ldots,\ A_{f-1,1},\\
A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ A_{3,2},\ \ldots,\ A_{f-1,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,f-1},\ A_{1,f-1},\ A_{2,f-1},\ A_{3,f-1},\ \ldots,\ A_{f-1,f-1};
\end{array}$$

заменив в этом определителе коэффициенты

$$A_{k,0},\ A_{k,1},\ A_{k,2},\ A_{k,3},\ldots,\ A_{k,f-1}$$

при неизвестных ν в уравнении (14) соответственно через

$$X,\ X_1\ X_2,\ X_3,\ldots,\ X_{f-1},$$

получим значение произведения $\Delta\nu_k$. Но поскольку Δ есть однородная функция одного измерения от этих коэффициентов, мы получим, в силу свойства подобных функций,

$$\Delta=\frac{d\Delta}{dA_{k,0}}A_{k,0}+\frac{d\Delta}{dA_{k,1}}A_{k,1}+\frac{d\Delta}{dA_{k,2}}A_{k,2}+\ldots+\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}A_{k,f-1},$$

а так как, кроме того, Δ есть целая функция коэффициентов

$$A_{k,0},\ A_{k,1},\ A_{k,2},\ldots,\ A_{k,f-1},$$

то частные производные Δ по этим коэффициентам не будут от них зависеть, и, следовательно, получим

$$\Delta\nu_k=\frac{d\Delta}{dA_{k,0}}X+\frac{d\Delta}{dA_{k,1}}X_1+\frac{d\Delta}{dA_{k,2}}X_2+\ldots+\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}X_{f-1}.$$

Этот вывод был бы правильным, если бы величины A были независимы друг от друга, но так как они связаны условием

$$A_{i,k}=A_{k,i},$$

которое для простоты надо учитывать при составлении определителя Δ, то отсюда следует, что, дифференцируя этот определитель по какой-либо величине $A_{i,k}$, мы в то же время будем изменять и величину $A_{k,i}$, что не было предположено в выражении произведения $\Delta\nu_k$. Поэтому надо иметь возможность выразить производные от Δ, взятые в предположении, что коэффициенты A независимы друг от друга, через производные, для которых предполагается соотношение

$$A_{i,k}=A_{k,i}.$$

Мы будем окружать скобками производные, относящиеся к первому предположению, сохранив обычные обозначения для

того, что имеет место в действительности; таким образом, мы напишем

$$\Delta\nu_k = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,0}}\right) X + \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,1}}\right) X_1 + \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,2}}\right) X_2 + \ldots + \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}\right) X_{f-1}.$$

Прежде всего мы будем иметь

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} = \left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) + \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right);$$

но из способа образования определителя Δ мы знаем, что коэффициенты при $A_{k,i}$ и $A_{i,k}$, входящие в него, или частные производные

$$\frac{d\Delta}{dA_{k,i}} \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta}{dA_{i,k}},$$

будут также определителями: первый из $(f-1)^2$ величин

$$\begin{array}{l}
A_{0,0},\ A_{1,0},\ A_{2,0},\ \ldots,\ A_{k-1,0},\ A_{k+1,0},\ \ldots,\ A_{f-1,0},\\
A_{0,1},\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ \ldots,\ A_{k-1,1},\ A_{k+1,1},\ \ldots,\ A_{f-1,1},\\
A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ \ldots,\ A_{k-1,2},\ A_{k+1,2},\ \ldots,\ A_{f-1,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,i-1},\ A_{1,i-1},\ A_{2,i-1},\ \ldots,\ A_{k-1,i-1},\ A_{k+1,i-1},\ \ldots,\ A_{f-1,i-1},\\
A_{0,i+1},\ A_{1,i+1},\ A_{2,i+1},\ \ldots,\ A_{k-1,i+1},\ A_{k+1,i+1},\ \ldots,\ A_{f-1,i+1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,f-1},\ A_{1,f-1},\ A_{2,f-1},\ \ldots,\ A_{k-1,f-1},\ A_{k+1,f-1},\ \ldots,\ A_{f-1,f-1},
\end{array}$$

а второй из $(f-1)^2$ величин

$$\begin{array}{l}
A_{0,0},\ A_{1,0},\ A_{2,0},\ \ldots,\ A_{i-1,0},\ A_{i+1,0},\ \ldots,\ A_{f-1,0},\\
A_{0,1},\ A_{1,1},\ A_{2,1},\ \ldots,\ A_{i-1,1},\ A_{i+1,1},\ \ldots,\ A_{f-1,1},\\
A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ \ldots,\ A_{i-1,2},\ A_{i+1,2},\ \ldots,\ A_{f-1,2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,k-1},\ A_{1,k-1},\ A_{2,k-1},\ \ldots,\ A_{i-1,k-1},\ A_{i+1,k-1},\ \ldots,\ A_{f-1,k-1},\\
A_{0,k+1},\ A_{1,k+1},\ A_{2,k+1},\ \ldots,\ A_{i-1,k+1},\ A_{i+1,k+1},\ \ldots,\ A_{f-1,k+1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{0,f-1},\ A_{1,f-1},\ A_{2,f-1},\ \ldots,\ A_{i-1,f-1},\ A_{i+1,f-1},\ \ldots,\ A_{f-1,f-1}.
\end{array}$$

Но, в силу соотношения

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

обе системы этих величин, из которых составлены определители, оказываются тождественными: каждая горизонтальная строка первого заменяется вертикальным столбцом второго. Так, например, третья строка

$$A_{0,2},\ A_{1,2},\ A_{2,2},\ \ldots,\ A_{k-1,2},\ A_{k+1,2},\ \ldots,\ A_{f-1,2}$$

первой системы и третий вертикальный столбец

$$A_{2,0},\ A_{2,1},\ A_{2,2},\ \ldots,\ A_{2,k-1},\ A_{2,k+1},\ \ldots,\ A_{2,f-1}$$

второй системы, если переставить значки, согласно уравнению

$$A_{k,i} = A_{i,k},$$

станут тождественными; и так как, кроме того, легко убедиться, что равные члены обоих определителей имеют одни и те же индексы в значении Δ, то отсюда очевидно, что эти определители, или частные производные

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right),$$

равны между собой; следовательно,

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}\right) = \left(\frac{d\Delta}{dA_{i,k}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{d\Delta}{dA_{k,i}}.$$

Отсюда, однако, надо исключить случай равенства значков i и k, для которого будем иметь

$$\left(\frac{d\Delta}{dA_{k,k}}\right) = \frac{d\Delta}{dA_{k,k}},$$

ибо в этом случае уравнение

$$A_{k,i} = A_{i,k}$$

по своей сущности не даст никакого соотношения и, следовательно, не будет оказывать влияния на производную Δ по $A_{k,k}$. Итак, получим, упростив Δ в силу соотношения $A_{k,i} = A_{i,k}$,

$$2\Delta\nu_1 = \frac{d\Delta}{dA_{k,0}}X + \frac{d\Delta}{dA_{k,1}}\dot{X}_1 + \frac{d\Delta}{dA_{k,2}}X_2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{k,f-1}}X_{f-1}. \quad (16)$$

Придавая k последовательно значения 0, 1, 2, . . . , $f-1$, получим все ν и таким образом найдем

$$X\nu + X_1\nu_1 + X_2\nu_2 + \ldots + X_{f-1}\nu_{f-1},$$

или 2θ, откуда

$$2\theta = \frac{1}{2\Delta}\begin{cases} \frac{d\Delta}{dA_{0,0}}X^2 + \frac{d\Delta}{dA_{1,0}}X_1^2 + \frac{d\Delta}{dA_{2,0}}X_2^2 + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{f-1,0}}X_{f-1}^2 + \\ + \frac{d\Delta}{dA_{0,1}}XX_1 + \frac{d\Delta}{dA_{0,2}}XX_2 + \frac{d\Delta}{dA_{1,2}} + \ldots + \frac{d\Delta}{dA_{i,k}}X_iX_\alpha; \end{cases} \quad (17)$$

вследствие этого уравнение (7) обратится в

$$\sum mv\cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum mu\cos\sigma\,\delta\varepsilon + \frac{d\theta}{dX}\delta L + \frac{d\theta}{dX_1}\delta L_1 + \\ + \frac{d\theta}{dX_2}\delta L_2 + \ldots + \frac{d\theta}{dX_{f-1}}\delta L_{f-1}. \quad (18)$$

В этом виде оно содержит из неизвестных только величины v, которые мы из него сразу и определим. Действительно, приравнивая между собой коэффициенты при вариациях $\delta\varepsilon$ в обеих частях равенства, получим формулы

$$\left.\begin{aligned} mv\cos\omega &= mu\cos\sigma + a\frac{d\theta}{dX}\cos\theta + a_1\frac{d\theta}{dX_1}\cos\theta_1 + \\ &+ a_2\frac{d\theta}{dX_2}\cos\theta_2 + \ldots + a_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\theta_{f-1}, \\ m'v'\cos\omega' &= m'u'\cos\sigma' + a'\frac{d\theta}{dX}\cos\theta' + a_1'\frac{d\theta}{dX_1}\cos\theta_1' + \\ &+ a_2'\frac{d\theta}{dX_2}\cos\theta_2' + \ldots + a_{f-1}'\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\theta_{f-1}', \\ m''v''\cos\omega'' &= m''u''\cos\sigma'' + a''\frac{d\theta}{dX}\cos\theta'' + a_1''\frac{d\theta}{dX_1}\cos\theta_1'' + \\ &+ a_2''\frac{d\theta}{dX_2}\cos\theta_2'' + \ldots + a_{f-1}''\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\theta_{f-1}'', \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

. . . .

которые дадут не только искомые количества движения mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$, ..., но также и их проекции на любые направления, что представляет полное решение задачи.

Относительно полученных значений проекций

$$mv\cos\omega,\quad m'v'\cos\omega',\quad m''v''\cos\omega'', \ldots$$

следует заметить, что импульсивные силы, как и связи системы, дают в них члены того же вида, как если бы каждая из этих причин действовала одна, независимо от других; но мы говорим лишь о виде этих членов, а не их величине, ибо величины зависят от одновременного действия всех причин.

Мы закончим эту статью некоторыми замечаниями, относящимися к живой силе после удара, и некоторыми соотношениями между величинами, входящими в задачу.

XIII. Предположим, что произвольные направления, к которым отнесены все углы в уравнениях (19), совпадают соответственно с направлениями скоростей v, v', v'', v''', ...; тогда для количеств движения mv, $m'v'$, $m''v''$, $m'''v'''$, ... мы будем иметь следующие значения:

$$mv = mu\cos\widehat{uv} + a\frac{d\theta}{dX}\cos\widehat{Dv} + a_1\frac{d\theta}{dX_1}\cos\widehat{D_1v} +$$

$$+ a_2\frac{d\theta}{dX_2}\cos\widehat{D_2v} + \ldots + a_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D_{f-1}v},$$

$$m'v' = m'u'\cos\widehat{u'v'} + a'\frac{d\theta}{dX}\cos\widehat{D'v'} + a'_1\frac{d\theta}{dX_1}\cos\widehat{D'_1v'} +$$

$$+ a'_2\frac{d\theta}{dX_2}\cos\widehat{D'_2v'} + \ldots + a'_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D'_{f-1}v'},$$

$$m''v'' = m''u''\cos\widehat{u''v''} + a''\frac{d\theta}{dX}\cos\widehat{D''v''} + a''_1\frac{d\theta}{dX_1}\cos\widehat{D''_1v''} +$$

$$+ a''_2\frac{d\theta}{dX_2}\cos\widehat{D''_2v''} + \ldots + a''_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}}\cos\widehat{D''_{f-1}v''},$$

. . . .

Умножая эти уравнения соответственно на v, v', v'', v''', ... и складывая, получим

$$\sum mv^2 = \sum muv\cos\widehat{uv} + \frac{d\theta}{dX}\sum av\cos\widehat{Dv} + \frac{d\theta}{dX_1}\sum a_1v\cos\widehat{D_1v} +$$
$$+ \frac{d\theta}{dX_2}\sum a_2v\cos\widehat{D_2v} + \ldots + \frac{d\theta}{dX_{f-1}}\sum a_{f-1}v\cos\widehat{D_{f-1}v},$$

или, заменяя суммы

$$\sum av\cos\widehat{Dv},\ \sum a_1v\cos\widehat{D_1v},\ \sum a_2v\cos\widehat{D_2v},\ \ldots,\ \sum a_{f-1}v\cos\widehat{D_{f-1}v}$$

их значениями из уравнений (2) и полагая для сокращения

$$\Phi = T\frac{d\theta}{dX} + T_1\frac{d\theta}{dX_1} + T_2\frac{d\theta}{dX_2} + \ldots + T_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}}, \tag{20}$$

получим

$$\sum mv^2 = \sum muv\cos\widehat{uv} - \Phi. \tag{21}$$

Это последнее уравнение может быть получено сразу из формулы (18), если предположить, что вариации $\delta\varepsilon$ совпадают по величине и направлению соответственно с величинами vdt. Та же формула (18), если бы мы заставили $\delta\varepsilon$ совпасть по величине и направлению с udt, дала бы

$$\sum muv\cos\widehat{uv} = \sum mu^2 + \frac{d\theta}{dX}\sum au\cos\widehat{Du} +$$
$$+ \frac{d\theta}{dX_1}\sum a_1u\cos\widehat{D_1u} + \ldots + \frac{d\theta}{dX_{f-1}}\sum a_{f-1}u\cos\widehat{D_{f-1}u},$$

или, заменяя суммы

$$\sum au\cos\widehat{Du},\ \sum a_1u\cos\widehat{D_1u},\ \sum a_2u\cos\widehat{D_2u},\ \sum a_{f-1}u\cos\widehat{D_{f-1}u}$$

их значениями из уравнений (13),

$$\sum muv\cos\widehat{uv} = \sum mu^2 - 2\theta - \Phi. \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) дают

$$\Phi = \sum mv\,(u \cos \widehat{uv} - v),$$

$$2\theta + \Phi = \sum mu\,(u - v \cos \widehat{uv}),$$

$$\theta + \Phi = \frac{1}{2} \sum mu^2 - \frac{1}{2} \sum mv^2,$$

$$\theta = \frac{1}{2} \sum m\,(u^2 + v^2 - 2uv \cos \widehat{uv}).$$

Разложим скорость u на две скорости, из которых одна будет v, а другую обозначим через w. Согласно правилу сложения скоростей, будем иметь

$$u \cos \widehat{uv} - v = w \cos \widehat{vw},$$

$$u - v \cos \widehat{uv} = w \cos \widehat{uw},$$

$$u^2 + v^2 - 2uv \cos \widehat{uv} = w^2$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \sum mvw \cos \widehat{vw}, \\ 2\theta + \Phi &= \sum muw \cos \widehat{uw}, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \theta + \Phi &= \frac{1}{2} \sum mu^2 - \frac{1}{2} \sum mv^2, \\ \theta &= \frac{1}{2} \sum mw^2. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Заметьте, что если бы не существовало связей между точками системы, то скорость массы m в конце удара была бы u, или, что то же, точка m имела бы две одновременных скорости v и w; в действительности остается только первая; следовательно, из-за присутствия связей системы m теряет скорость w; отсюда эта скорость носит название *потерянной скорости*. Но последнее из уравнений (24) показывает нам, что величина θ, которая играет столь большую роль в теории удара, есть не что иное, как живая сила системы, обусловленная потерянными скоростями. А первое из этих уравне-

ний показывает, что $\theta+\Phi$ представляет живую силу, потерянную системой вследствие связей, ибо если бы их не было, то система имела бы живую силу $\frac{1}{2}\sum mu^2$; а так как у нее остается только $\frac{1}{2}\sum mv^2$, то разность

$$\frac{1}{2}\sum mu^2-\frac{1}{2}\sum mv^2,$$

или равная ей величина $\theta+\Phi$, очевидно, представит потерянную живую силу. Итак, эта сила и живая сила, зависящая от потерянных скоростей и выраженная, как мы видим, только одной величиной θ, различаются между собой на величину Φ. Следовательно, они были бы равны друг другу в том частном случае, когда Φ было бы равно нулю, а это могло бы иметь место, если бы условия возможных перемещений не содержали членов Tdt, пропорциональных элементу времени. Действительно если бы все T были нулями, то из уравнения

$$\Phi=T\frac{d\theta}{dX}+T_1\frac{d\theta}{dX_1}+T_2\frac{d\theta}{dX_2}+\ldots+T_{f-1}\frac{d\theta}{dX_{f-1}} \qquad (20)$$

очевидно, что Φ также равнялось бы нулю. В этом частном случае потерянная живая сила и живая сила, зависящая от потерянных скоростей, имели бы одинаковую величину θ.

В случае $\Phi=0$ уравнение (22), если в нем заменить θ через $\frac{1}{2}\sum mw^2$, обратится в

$$\frac{1}{2}\sum mu^2-\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{2}\sum mw^2. \qquad (25)$$

Предыдущее уравнение между двумя рядами живых сил заключает как частный случай знаменитую теорему Карно о потере живых сил при столкновении твердых тел. Действительно, вам станет ясен случай столкновения таких тел, если вы допустите, что здесь нет импульсивных сил и что удар происходит единственно от изменений в связях системы; ибо этот толчок происходит только от внезапного установления связей между телами

в момент, когда они начинают соприкасаться. Отсутствие импульсивных сил сведет скорости u к тем, которые имели место до удара или толчка и которые мы обозначили через β. Тогда последнее уравнение обратится в

$$\frac{1}{2}\sum m\beta^2 - \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum mw^2.$$

Отсюда получается вывод, что при ударе твердых тел происходит потеря живой силы, равная той живой силе, которую имела бы совокупность этих тел, если бы каждое из них обладало скоростью, потерянной им при ударе. В этом и состоит теорема Карно.

XIV. Путем анализа, вполне сходного с предыдущим, мы можем сравнить удар, испытанный нашей системой, с ударом, который она испытала бы, если бы была освобождена не от всех, но от некоторых стесняющих ее связей. Скажем несколько слов по этому важному вопросу.

Положим, что связи, алгебраические выражения которых зависят от величин L_g, L_{g+1}, L_{f-g}, уничтожены, но остались другие связи, которым соответствуют величины L, L_1, $L_2, \ldots, L_{g-1}$, и обозначим через V, Ω и μ для освобожденной таким образом системы то, что обозначали v, ω и ν для системы, подчиненной всем связям. Буква g означает целое число, меньшее f. Мы будем иметь

$$\sum mV\cos\Omega\,\delta\varepsilon = \sum mu\cos\sigma\,\delta\varepsilon + \mu\delta L + \mu_1\delta L_1 + \mu_2\delta L_2 + \ldots + \mu_{g-1}\delta L_{g-1};$$

вычитая это уравнение из формулы (7), получим

$$\sum mv\cos\omega\,\delta\varepsilon = \sum mV\cos\Omega\,\delta\varepsilon + (\nu - \mu)\,\delta L + (\nu_1 - \mu_1)\,\delta L_1 +$$
$$+ (\nu_2 - \mu_2)\,\delta L_2 + \ldots + (\nu_{g-1} - \mu_{g-1})\,\delta L_{g-1} + \nu_g\delta L_g + \nu_{g+1}\delta L_{g+1} +$$
$$+ \nu_{g+2}\delta L_{g+2} + \ldots + \nu_{f-1}\delta L_{f-1}.$$

Это соотношение, вполне сходное с формулой (7), можно рассматривать, как мы рассматривали эту последнюю; выведем из нее некоторые следствия.

Заставим величины $\delta\varepsilon$ совпасть по величине и направлению сначала с величинами vdt, потом с Vdt; получим, положив для краткости

$$\mu T + \mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + \ldots + \mu_{g-1} T_{g-1} = \Phi'$$

и сократив общий множитель dt,

$$\sum mv^2 = \sum mvV \cos \widehat{vV} - \Phi + \Phi',$$

$$\sum mvV \cos \widehat{vV} = \sum mV^2 + (\nu - \mu) \sum aV \cos \widehat{DV} +$$
$$+ (\nu_1 - \mu_1) \sum a_1 V \cos \widehat{D_1 V} + \ldots + (\nu_{g-1} - \mu_{g-1}) \sum a_{g-1} V \cos \widehat{D_{g-1} V} +$$
$$+ \nu_g \sum a_g V \cos \widehat{D_g V} + \nu_{g+1} \sum a_{g+1} V \cos \widehat{D_{g+1} V} +$$
$$+ \ldots + \nu_{f-1} \sum a_{f-1} V \cos \widehat{D_{f-1} V}.$$

Но так как скорости V удовлетворяют первым g из уравнений (2), то мы можем заменить суммы

$$\sum aV \cos \widehat{DV}, \quad \sum a_1 V \cos \widehat{D_1 V}, \quad \sum a_2 V \cos \widehat{D_2 V}, \ldots \sum a_{g-1} \cos \widehat{D_{g-1} V}$$

соответственно через

$$-T, \quad -T_1, \quad -T_2, \ldots, \quad -T_{g-1},$$

и если, кроме того, положим

$$\sum a_g V \cos \widehat{D_g V} + T_g = -Y_g,$$
$$\sum a_{g+1} V \cos \widehat{D_{g+1} V} + T_{g+1} = -Y_{g+1},$$
$$\sum a_{g+2} V \cos \widehat{D_{g+2} V} + T_{g+2} = -Y_{g+2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum a_{f-1} V \cos \widehat{D_{f-1} V} + T_{f-1} = -Y_{f-1}$$

и обозначим для краткости

$$\nu_g Y_g + \nu_{g+1} Y_{g+1} + \nu_{g+2} Y_{g+2} + \ldots + \nu_{f-1} Y_{f-1} = 2\theta',$$

то последнее уравнение сведется к

$$\sum mvV \cos \widehat{vV} = \sum mV^2 - 2\theta' - \Phi + \Phi'.$$

Уравнения

$$\left.\begin{aligned} \sum mv^2 &= \sum mvV\cos\widehat{vV} - \Phi + \Phi', \\ \sum mvV\cos\widehat{vV} &= \sum mV^2 - 2\theta' - \Phi + \Phi' \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

имеют тот же вид, что и уравнения (17) и (18), и из них выводятся аналогичные следствия. Сложив их, получим разность живых сил

$$\frac{1}{2}\sum mV^2 - \frac{1}{2}\sum mv^2 = \theta' + \Phi - \Phi';$$

вычитая одно из другого, получим

$$\frac{1}{2}\sum m\left(V^2 + v^2 - 2vV\cos\widehat{vV}\right) = \theta'.$$

Но если мы разложим скорость V на v и другую составляющую w, то будем иметь

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2vV\cos\widehat{vV},$$

отсюда

$$\frac{1}{2}\sum mw^2 = \theta' \qquad (27)$$

и

$$\frac{1}{2}\sum mV^2 - \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum mw^2 + \Phi - \Phi'. \qquad (28)$$

Скорости w, очевидно, те, которые теряются точками системы со скоростями v по отношению к точкам системы со скоростями V вследствие препятствий, стесняющих первую из двух систем и оставляющих свободной вторую. Таким образом, уравнение (27) дает живую силу, относящуюся к потерянным скоростям, а уравнение (28) — разность между потерянной живой силой, изображаемой выражением

$$\frac{1}{2}\sum mV^2 - \frac{1}{2}\sum mv^2,$$

и живой силой $\sum mw^2$, относящейся к потерянным скоростям. Эта разность уничтожилась бы в том частном случае, если бы

условия возможных перемещений не содержали членов Tdt, пропорциональных элементу времени dt, ибо тогда величины Φ и θ обе были бы равны нулю, и потому мы имели бы

$$\frac{1}{2}\sum mV^2-\frac{1}{2}\sum mv^2=\frac{1}{2}\sum mw^2.$$

Отсюда заключаем, само собой разумеется, ограничиваясь только указанным частным случаем, т. е. тем, когда все T равны нулю, что прибавление новых связей уменьшает живую силу системы на величину, равную живой силе, какую имела бы система, если бы каждая точка обладала той скоростью, которую эта самая точка потеряла бы вследствие прибавления этих новых связей. Мы также видим, обратно, что при уничтожении некоторых связей система получила бы увеличение живой силы, равное той живой силе, какую она имела бы, если бы каждая ее точка обладала скоростью, которую она приобрела бы вследствие уничтожения этих связей.

Можно было бы обобщить предшествующие соображения, сравнивая действие импульсивных сил на систему точек, подчиненных каким-либо связям, с действием тех же сил на те же точки, но стесненные другими, также произвольными связями. Однако мы не будем заниматься таким сравнением, так как, согласно сказанному выше, оно не представит никаких затруднений.

ПРИЛОЖЕНИЯ



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Первая половина XIX века была временем широкого развития механики и математической физики на основе математического анализа.

Из зарубежных ученых в связи с этим достаточно вспомнить имена Лапласа, Фурье, Пуассона, Коши, Гамильтона и Якоби. М. В. Остроградский был единственным русским, который вместе с этой блестящей плеядой ученых того времени создавал основы современной аналитической механики и математической физики. С некоторыми из них он находился и в личном контакте.

Тесная связь между работами указанных ученых по содержанию и их близость по времени делает нелегкой задачу выяснения зависимости их идей и результатов. Кроме того, все работы М. В. Остроградского были опубликованы на французском языке в различных изданиях и только немногие появились в русском переводе.

Принимая все это во внимание, уже давно надо было издать на русском языке сборник основных трудов М. В. Остроградского. Настоящее издание и является первым таким сборником.

В нем напечатаны по существу все принципиально важные, основные работы М. В. Остроградского по механике и математической физике. Из крупных по объему исследований его не напечатан «Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к задаче об изопериметрах», в котором среди других результатов показано, что все дифференциальные уравнения вариационных задач с одной независимой переменной могут быть приведены к канонической системе.

Эта работа является естественным обобщением того, что было сделано М. В. Остроградским для уравнений динамики и что напечатано в настоящем сборнике. Упомянутая работа относится, строго говоря, уже не к механике, а к вариационному исчислению. Но в мемуаре неоднократно указывается на тот факт, что результаты работ являются обобщением соответствующих результатов аналитической механики.

Как известно, М. В. Остроградскому принадлежит и ряд фундаментальных результатов в области математического анализа. Некоторые из них связаны с его исследованиями по математической физике. В частности, его знаменитая формула преобразования тройного интеграла в интеграл по поверхности была им доказана в заметке по теории теплоты. Эта заметка, так же как и две другие работы, посвященные исследованию кратных интегралов, напечатана в настоящем сборнике.

К области математического анализа относится и большой цикл работ М. В. Остроградского по вопросу интегрирования рациональных дробей и алгебраических функций. Из этого цикла в настоящем сборнике напечатана только одна работа «Об интегрировании рациональных дробей», посвященная вопросу об отделении алгебраической части интеграла от рациональной дроби.

Это исследование является наиболее значительным среди других, посвященных интегралам от рациональных дробей. По нашему мнению, до сих пор еще не выполнена задача всестороннего изучения работ М. В. Остроградского по исследованию интегралов от алгебраических функций и выяснению взаимоотношения этих работ с исследованиями Абеля и особенно Лиувилля, а также с более поздними работами П. Д. Чебышева по этому же вопросу.

В сборнике нет ни одной работы по теории вероятностей, поскольку эти работы не являются существенными в научном наследии М. В. Остроградского.

Как мы уже упоминали, почти все работы настоящего сборника впервые появляются на русском языке. При переводе устранены опечатки и мелкие неточности. В формулах сохранены обозначения оригинала.

Комментарии к работам имеют двоякую цель. С одной стороны, они показывают значение работы и ее связь с другими работами по этому же вопросу. С другой стороны, прокомментированы отдельные неясные или ошибочные места. В двух случаях исключены последние параграфы работ, содержащие неясные или неверные утверждения, на что указано в комментариях. Отметим, что общая часть комментариев к работам по аналитической механике не связана с отдельными работами, а выделена в одно целое, что представляется целесообразным ввиду большого значения этих работ в творчестве М. В. Остроградского и их тесной связи друг с другом.

Естествен некоторый параллелизм между комментариями и тем материалом, который имеется в «Очерке жизни, научного творчества и педагогической деятельности М. В. Остроградского».

Поскольку настоящий сборник содержит основные работы М. В. Остроградского, то комментарии к ним, в их общей части, дают, как нам кажется, достаточно яркое представление о той большой роли, которую играли работы М. В. Остроградского в области физико-математических наук первой половины XIX в.

Чрезвычайно большое значение имела педагогическая деятельность М. В. Остроградского. Она подробно изложена в очерке его жизни, напечатанном в настоящем сборнике. В нем же впервые подробно освещен вопрос о «школе М. В. Остроградского». У него не было учеников по математике, вероятно, потому, что он не преподавал в университете. Но его влияние на развитие прикладной математики и механики в России было огромным, и в этих областях он имел многих выдающихся учеников.

В. И. Смирнов.

ОЧЕРК ЖИЗНИ, НАУЧНОГО ТВОРЧЕСТВА И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ М. В. ОСТРОГРАДСКОГО

Михаил Васильевич Остроградский родился 12 сентября (по старому стилю) 1801 г. в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии.* Отец его был небогатым помещиком.

Детские годы знаменитого русского математика не были чем-либо примечательными, хотя внимательный глаз уже тогда мог бы заметить некоторые особенности, выделявшие его среди других детей. Еще в детстве он имел необыкновенную страсть к механизмам, часами мог наблюдать за их работой, любил мастерить, измерять различные предметы. Эта наклонность роднит его с великим русским математиком П. Л. Чебышевым, который, будучи еще мальчиком, тоже увлекался различными механическими установками. Эти увлечения детских лет развились затем в замечательный инженерный талант; как мы потом увидим, Остроградский был не только блестящим математиком-теоретиком: он также глубоко интересовался и много занимался вопросами техники.

Восьми лет Остроградского отдали в полтавскую гимназию, поместив его в существовавший при ней пансион, называвшийся «Домом воспитания бедных дворян». Полтавская гимназия не пробудила у него интереса к науке. Гнетущая обстановка бездушного формализма, «зубрежка», характерная для гимназий того времени, отрицательно сказались на пытливом, живом мальчике. Он забро-

* По существующему административному делению деревня Пашенная относится к Буняковскому сельсовету Козельщанского района Полтавской области.

сил книги, предался играм и стал мечтать о блестящей военной карьере. Отметки его за гимназические годы весьма посредственны. Так, в 1814 г. Остроградский, при 9-балльной системе, имел следующие годовые оценки: по математике 5, по истории и географии 6, по метафизике и нравственной философии 6, по французскому языку 1, по немецкому языку 1. Уроки латинского языка Остроградский попросту перестал посещать, и в журнале против его фамилии выставлялись такие замечания: «не учится», «не бывает в классе», «не имеет охоты к латинскому языку».

В 1816 г. родители Остроградского, потеряв надежду на улучшение успехов своего сына, взяли его из гимназии для определения на военную службу. Таким образом, полтавская гимназия оказалась неспособной выявить тот родник великолепных дарований, который затем легко был открыт прогрессивными преподавателями Харьковского университета.

На физико-математическое отделение Харьковского университета Остроградский поступил в 1817 г. по настоянию его дяди Устимовича, заметившего способности племянника и сумевшего убедить родителей оставить их первоначальное намерение определить сына на военную службу.

Нелегко было юноше расстаться с мыслью о военной карьере. Не сразу увлекся молодой Остроградский математикой; но такой перелом наступил, и на смену мечтам о военной службе пришло страстное увлечение математикой. В этом немалую роль сыграл преподаватель математики Харьковского университета Андрей Федорович Павловский, на квартире у которого жил Остроградский.

Прекрасный знаток своего предмета, Павловский стремился привить окружавшей его молодежи любовь к математике. Обратив внимание на математические способности Остроградского, он сумел пробудить в юноше интерес, а затем и страстное увлечение математикой. С жаром принявшись за учение, Остроградский вскоре поразил своего воспитателя незаурядными успехами. «Я скоро почувствовал,—писал профессор А. Ф. Павловский, — какая колоссальная разница между мною и Остроградским. Если я только усидчивым трудом приобретал знания, то мой ученик, от природы обладавший

блестящими дарованиями, быстро усваивал готовое и тут же творил свое».*

В октябре 1818 г. Остроградский окончил университет, получив при этом аттестат, в котором значилось, что он обучался «алгебре, тригонометрии, криволинейной геометрии, истории, статистике Российского государства и всеобщей истории с очень хорошим успехом, а военным наукам, теории функций, интегральному и вариационному исчислению и российской словесности с превосходным успехом и во все время пребывания его, Остроградского, в сем университете поведения был добропорядочного».**

После годичного перерыва Остроградский вновь приступил к занятиям и в 1820 г. блестяще сдал экзамены на степень кандидата Но степени Остроградский все-таки не получил. Он стал жертвой интриг; на его долю выпали тяжелые испытания, связанные с той идейно-политической борьбой, которая в то время началась в русских университетах вообще и в Харьковском, в частности.

Освещение этой идейно-политической борьбы в университетских кругах представляет интерес, поскольку ярко рисует обстановку, в которой формировалось мировоззрение молодого Остроградского. Начало XIX в. ознаменовалось оживлением университетского образования в России. Рост государственного аппарата, усиление армии и необходимость ее технического перевооружения, народнохозяйственные нужды настойчиво требовали развития системы профессионального и общего образования в России. Однако даже развитие школ наталкивалось на недостаток кадров просвещенных учителей.

Единственный в то время Московский университет не мог справиться с задачей подготовки преподавателей для всей страны, не говоря уже о других специалистах. В связи с этим в начале XIX в. открываются еще пять университетов: в Дерпте (1802), Вильно (1803), Казани (1804), Харькове (1804), Петербурге (1819).

Русские университеты сразу получили новый устав (1804 г.), дававший им единообразную организацию. Этот устав предоставлял

---

* Ф. П. Отрадных. М. В. Остроградский. Л., 1953, стр. 16.

** Архив АН СССР, разр. V, оп. 1-о, № 11, л. 31.

им известное самоуправление и автономию в деле преподавания. Увеличение числа университетов в России способствовало росту кадров демократической интеллигенции и развитию научно-общественной мысли.

К сожалению, эта пора продолжалась недолго. Уже в середине 10-х годов XIX в. полулиберальные тенденции начала века сменяются все нарастающей реакцией. Правительство Александра I, напуганное ростом революционных настроений, все более и более обрушивается на просветительные учреждения, на учащуюся молодежь.

В первую очередь начинаются репрессии против школ и университетов. Устав 1804 г. фактически отменяется, свобода преподавания окончательно уничтожается, права советов университетов резко ограничиваются. Само существование университетов стояло под угрозой. М. А. Салтыков писал в 1817 г. Ф. К. Броннеру:* «Более нежели вероятно, что за исключением Московского все остальные наши университеты будут упразднены, вопрос о закрытии университетов Казанского и Харьковского уже поставлен на очередь».**

Министерство народного просвещения было преобразовано в 1817 г. в «министерство духовных дел и народного просвещения», чтобы «русское христианское благочестие было всегда основанием истинного просвещения».*** Во главе министерства был поставлен кн. А. Н. Голицын. Политика министерства Голицына в области просвещения и науки характеризовалась безраздельным и беспросветным господством мистики и мракобесия, решительной борьбой с малейшим проявлением материализма в русском естествознании.

В это время на поприще просвещения подвизались такие мракобесы, как попечители учебных округов Магницкий в Казани, Карнеев в Харькове и Рунич в Петербурге. Историк Петербургского универ-

---

* Ф. К. Броннер (1759—1850) — профессор физики Казанского университета; М. А. Салтыков (1767—1851) — попечитель Казанского учебного округа.

** Цит. по: В. Ф. Каган. Н. И. Лобачевский. М., 1944, стр. 62.

*** В. И. Чарнолусский. Начальное образование в первой половине XIX столетия. В сб. «История России в XIX веке», СПб., 1907, т. 4, стр. 74.

ситета В. В. Григорьев писал: «Университет в самом скором времени принял вид средневекового католического монастыря».*

Все эти магницкие, руничи, карнеевы буквально наводнили русские университеты иностранными профессорами; многие из последних не стояли на должном научном уровне. Так, например, в Харьковском университете в 1810 г. из 26 преподавателей было 20 иностранцев. Корпорации иностранных ученых были настроены против русских профессоров.

Такова была та обстановка, которая сложилась к двадцатым годам прошлого столетия во внутренней жизни университетов и в которой оказался молодой Остроградский.

В то же время в среде студентов и профессоров университетов возникает острая борьба двух лагерей: реакционного и прогрессивного. В Харьковском университете первый лагерь, состоявший из наиболее реакционной части профессуры и студенчества, возглавлял попечитель учебного округа Карнеев. Эту группу поддерживали министр и другие влиятельные лица.

Второй лагерь, не имевший опоры в «высших сферах», возглавлялся одним из наиболее просвещенных и прогрессивных людей России — ректором Харьковского университета, профессором математики Т. Ф. Осиповским. Молодой Остроградский примкнул к прогрессивному лагерю; он был сторонником и ближайшим учеником Осиповского.

Осиповский, будучи прекрасным математиком, интересовался и глубоко изучал философию, особенно сочинения французских материалистов XVIII века. Он являлся противником идеалистической философии в естественных науках, решительно выступал против Канта, отвергая его учение об априорном и субъективном характере наших представлений о пространстве и времени.

Осиповский и его сторонники встретили упорное сопротивление со стороны реакционно настроенных профессоров, имевших могучую поддержку в лице попечителя Карнеева и министра просвещения Голицына. Ниже мы приводим выдержки из доноса профессора

* В. В. Григорьев. Императорский СПб. университет в течение первых 60 лет его существования. СПб., 1870, стр. 34.

Дудровича на ректора университета. Этот донос весьма ярко характеризует фигуру Осиповского и ту обстановку, в которой он боролся.

«Ваше превосходительство, — писал Дудрович попечителю Карнееву, — изволите знать образ мыслей господина ректора, совершенно противный началам веры и святого писания. . . Сей-то рассудок господина ректора причиной, что ни один почти из обучающихся в Харьковском университете по части математики студентов, коих он глава, почитающий явно все за вздор и сумасшествие, что не подлежит математическим его выкладкам, не ходит ни на богопознание и христианское учение, ни на лекции мои по части философии».*

Многочисленные доносы и враждебное отношение к Осиповскому Карнеева и Голицына сделали свое дело. В 1821 г. он был освобожден от должности ректора и профессора университета. Удар, нанесенный реакционной профессурой и официальной властью по Осиповскому, пал также и на ближайшего его ученика — М. В. Остроградского.

В 1820 г. Остроградский прекрасно сдал экзамены, и его имя в числе отличившихся было упомянуто на торжественном собрании университета. Принимая во внимание выдающиеся успехи Остроградского, Осиповский предложил присудить ему ученую степень кандидата наук. Однако это предложение встретило противодействие со стороны реакционной части профессуры. Тот же Дудрович, мстя Осиповскому, идейному руководителю Остроградского, писал попечителю Карнееву, что «студент Остроградский действительно в продолжение всего времени своего в университете по своему произволу пренебрегал публичными лекциями философии и никогда их не посещал» и что «он не слушал богопознания и христианского учения, несмотря на предписания начальства».**

В результате этого заявления и последующего письма Карнеева министру последовало предписание, не только запрещающее производство Остроградского в кандидаты наук, но и предлагающее

*Цит. по: С. С. Чириков. Т. Ф. Осиповский. Русская старина, 1876, № 11, стр. 484—485. Донос Дудровича датирован 24 X 1820.

** Русская старина, 1876, № 11, стр. 485.

отобрать у него диплом об окончании университета, полученный им в 1818 г. Это было неслыханным глумлением над будущим ученым, чей талант был замечен уже тогда. После четырех лет, проведенных в университете, Остроградский остался без документов об его окончании, несмотря на то, что он трижды сдал все требующиеся для этого экзамены.

Вспоминая об этой возмутительной несправедливости, его брат А. В. Остроградский писал: «Брат, нетерпеливый от природы, не мог перенести таких выходок, он пошел в правление университета, спросил о причинах делаемых стеснений, и когда ему дали безосновательный ответ, то брат вернул свой студенческий аттестат и отдал его заседающим профессорам, прося их вытереть и имя его из всех списков университета».*

Так закончился первый период жизни и учения Остроградского. Важно подчеркнуть, что Остроградский в годы своей университетской учебы, в мрачные годы александровского времени, отдал свои симпатии передовым течениям в Харьковском университете; он примкнул к прогрессивному лагерю, возглавляемому Осиповским.

К счастью, замечательный талант Остроградского не был загублен и потерян для России и человечества. Гонения и происки реакционеров не оттолкнули молодого ученого от математики; наоборот, в нем сильно укрепились любовь к науке и твердое сознание своих дарований. Остроградский решает продолжать свои занятия под руководством выдающихся математиков Политехнической школы — детища французской революции. В мае 1822 г. с этой целью он выехал в Париж.

С каким же запасом математических знаний отправился Остроградский за границу? Ознакомление с уровнем преподавания, достигнутым тогда на физико-математическом факультете Харьковского университета, дает основание утверждать, что Остроградский получил там весьма солидные знания по дифференциальному, интегральному и вариационному исчислениям, по дифференциальным уравнениям и теоретической механике, которую читал Осиповский.

* С.-Петербургские ведомости, 1862, 28 января, № 22.

Следует предположить, что у Остроградского уже к моменту окончания университета сложились, под влиянием Осиповского, вполне определенные математические интересы. Не случайно, что именно математическая физика и механика явились главными предметами исследований будущего ученого. Это те предметы, которыми занимался и его первый учитель Осиповский.*

Впоследствии интерес Остроградского к этим предметам значительно углубился и расширился при общении с лучшими представителями передовой французской математической школы. Франция той поры была рассадником физико-математической культуры. Французская революция 1789—1893 гг., уничтожившая феодальные путы, вдохнула новую жизнь во французскую науку. Плеяда талантливых французских ученых (Лаплас, Коши, Фурье, Монж, Пуассон и др.) трудилась над развитием новых областей математики.

Общим и характерным почти для всех этих ученых было то, что они прошли богатую и напряженную политическими событиями жизнь; многие из них были не обычными кабинетными учеными, а активными участниками французской революции и общественными деятелями послереволюционной Франции. Почти все они — воспитанники и деятели Политехнической школы. Этих ученых, каждый из которых трудился в своей области, объединяло также общее стремление к применению математического анализа для изучения вопросов естествознания.

Оказавшись в этом мощном творческом коллективе, молодой Остроградский быстро изучил новые методы французской математической школы и вскоре сам стал заниматься актуальными вопросами математического анализа, часто опережая своих французских коллег. Своей выдающейся одаренностью он очень скоро обратил на себя внимание знаменитых французских математиков и механиков того времени.

Уже через два года после его прибытия в Париж Коши в мемуаре «Об определенных интегралах, взятых между мнимыми преде-

* Напомним, например, что Осиповский первым в России перевел с французского языка четыре тома «Небесной механики» Лапласа.

лами» (1825) с похвалой отозвался об исследованиях Остроградского, посвященных вычислению интегралов. Он писал: «Наконец, один русский молодой человек, одаренный большой проницательностью и весьма искусный в вычислении бесконечно малых, Остроградский, прибегнув также к употреблению тех же интегралов и к преобразованию их в обыкновенные, дал новое доказательство формул, мною выше упомянутых, и обобщил другие формулы, помещенные мной в 19-й тетради Политехнической школы. Господин Остроградский любезно сообщил мне главные результаты своей работы».*

В Париже Остроградский пользовался дружбой и поддержкой не только Коши, но и Пуассона, Понселе, Штурма, а у Лапласа он был принят как член семьи. Небезынтересны отдельные эпизоды из жизни Остроградского в Париже, убедительно показывающие, как ярко блистал в Париже талант молодого русского ученого.

В. Г. Алексеев в своей книге рассказывает, что по пути в Париж Остроградский был обобран попутчиком. Оказавшись в тяжелом материальном положении, он вынужден был поступить на службу к Лапласу. Остроградский наблюдал, как этот знаменитый математик бьется у доски в течение продолжительного времени над решением какой-то задачи, но желаемого результата не получает. Велико же было удивление Лапласа, когда, придя однажды домой, он увидел на доске доведенное до конца преобразование его формул с давно уже предвиденным им результатом. Еще больше было удивление Лапласа, когда он узнал, что задача решена Остроградским. После этого Лаплас подружился с молодым русским ученым.**

А. Н. Крылов приводит также весьма любопытный эпизод.*** По какой-то причине в 1826 г. Остроградский не получил своевременно от отца денег, задолжал в гостинице и по жалобе хозяина был посажен в «Клиши» — долговую тюрьму в Париже. Здесь он, видимо, особенно усердно занимался математикой и написал свою знаменитую работу «О распространении волн в цилиндрическом бассейне». Коши в ноябре 1826 г. с самым лестным отзывом представил этот

* Математический сборник, т. 22, 1901, вып. 1, стр. 502.

** В. Г. Алексеев. М. В. Остроградский. Юрьев, 1902, стр. 7.

*** Архив АН СССР, ф. 759, оп. 364, лл. 7—8.

мемуар Парижской Академии, которая удостоила работу Остроградского высшего отличия — напечатания в «Записках ученых посторонних академий». Более того, Коши, не будучи сам богатым человеком, выкупил Остроградского из долговой тюрьмы.

Мемуар, который был так высоко оценен во Франции, посвящался задаче определения малых волнообразных движений жидкости, заключенной в цилиндрическом сосуде с круглым дном. О научном значении этой задачи можно судить хотя бы по тому, что еще в 1816 г. Парижская Академия наук объявила специальный конкурс на решение ее.

Эта работа еще больше укрепила научную репутацию молодого Остроградского. Внешним выражением признания Остроградского математическими кругами Парижа явился тот факт, что Остроградский получил приглашение занять профессорское место в колледже Генриха IV.

Добрые отношения, установившиеся тогда между Остроградским и выдающимися математиками Франции, сохранились на долгое время. Многие годы Остроградский не переставал получать дружеские письма от Коши, Штурма, Бине, Ляме.

Приведем одно из них, написанное Штурмом.

Париж, 24 июля 1847 г.

«Я был очень обрадован получением от Вас известий через господина лейтенанта Буцкого, который оказал мне любезность, навестив меня. Он дал мне самый обстоятельный отчет о Ваших успехах. Вы окружены очаровательной семьей и осыпаны почестями, соответствующими Вашему таланту. Да здравствует Россия, которая умеет ценить своего выдающегося геометра!

«Вам полагается еще одна дань: звание члена-корреспондента Парижской Академии наук, которое Вы уже давно заслуживаете и которое Вам дадут при первой возможности.

«В секции математики (которая составляет список кандидатов) Вашими самыми горячими сторонниками являются гг. Бине, Ляме и я, а вне секции — с различной степенью горячности — Коши, Дюгамель, Понселе, Пиобер, Морен, Лиувилль и т. д. Чтобы сохранить их доброе расположение, Вы сделали бы очень хорошо, если бы отправили в нашу Академию два или три экземпляра Ваших прекрасных мемуаров, которые, быть может, недостаточно известны здесь

«Но лучше всего было бы — по многим другим причинам — приехать в Па-

риж весной, а не летом. Г. Брассьен живет в Тулузе, довольный своей судьбой; он поручил мне передать Вам свои дружеские пожелания.

«Уже несколько лет, как я занимаюсь больше моими лекциями, чем исследованиями. Я также очень сконфужен теми похвалами, которыми Вы осыпаете такого лентяя, как я.

Преданный Вам *Штурм*».*

Долго оставаться во Франции Остроградский не мог. Находясь в Париже в окружении творческого коллектива выдающихся математиков, пользуясь их полным расположением, Остроградский все же ни на минуту не оставлял намерений возвратиться в Россию. Его тянуло на родину; Париж и Франция его не прельщали.

В 1828 г. Остроградский выехал в Петербург. Приехав в Париж молодым человеком, полным творческих устремлений, он покидал этот город равноправным коллегой знаменитых математиков.

Но что ждет его на родине? Об этом Остроградский тогда ничего не мог сказать.

Шестью годами ранее, после неприятного инцидента в Харьковском университете, он покинул Россию. Обратно возвращается без диплома об окончании высшей школы. На всякий случай Остроградский запросил из Полтавы полученный им еще в юные годы в местной почтовой конторе оттестат на чин коллежского регистратора.

Прибегнуть к аттестату коллежского регистратора Остроградскому, однако, не пришлось. Русские ученые внимательно следили за успехами своего соотечественника** и с нетерпением ждали его возвращения. Слава Остроградского как блестящего математика докатилась до России ранее его приезда. О том, сколь она была велика, можно судить хотя бы по тому, что когда молодые люди отправлялись за границу учиться, то друзья и родные напутствовали их словами: «Становись Остроградским!».

---

* Цит. по: В. Е. Прудников. Четыре письма к М. В. Остроградскому. Историко-матем. исследования, вып. VII, М., 1954, стр. 716—719. Письмо датировано 24 VII 1847.

** Каждое научное достижение Остроградского в Париже русские математики и, в особенности, его учителя Осиповский и Павловский воспринимали с большой радостью. См. воспоминания А. В. Остроградского (С.-Петербургские ведомости, 1862, 28 января, № 22).

Сразу же после приезда Остроградского в Петербург началась его плодотворная работа в Академии наук и кипучая педагогическая деятельность. Вскоре он представил Петербургской Академии одну за другой три работы: «Заметку об интеграле, встречающемся в вычислении притяжения сфероидов», «Заметку об определенных интегралах», «Заметку по теории теплоты».

Эти исследования, а также отзывы об его блестящем математическом даровании, дошедшие из Франции, произвели большое впечатление на научные круги Академии, и 17 декабря 1828 г., по рекомендации академиков Фусса, Коллинса и Вишневского, он был избран адъюнктом Академии наук.

В следующем году Остроградский снова опубликовал в изданиях Академии три работы: по механике, теории теплоты и об интегрировании уравнений теории упругости. В том же году он начал чтение в Академии курса небесной механики. Этот курс, записанный И. Янушевским,* был издан и получил высокую оценку Араго и Пуассона. Они писали: «Прочтя внимательно лекции Остроградского, мы находим, что этот даровитый профессор глубоким изучением усвоил общие методы, которыми в последнее время обогатилась небесная механика, и упростил их изложение . . . Мы полагаем, что труд Остроградского заслуживает похвалу и одобрение Академии».**

Ряд прекрасных работ, представленных Академии, а также курс лекций по небесной механике окончательно упрочили за Остроградским репутацию выдающегося математика, и 19 августа 1830 г. он был избран экстраординарным академиком, а 21 декабря 1831 г. ординарным академиком по прикладной математике.

С этого времени жизнь Остроградского была полна творческих удач, и деятельность его отмечалась присвоением ряда почетных званий. Так, в 1834 г. Остроградский был избран членом Американской Академии наук, в 1841 г. — членом Туринской Академии,

*Впоследствии профессор математики и механики в Институте корпуса инженеров путей сообщения.

** Записки Акад. наук, т. 3, 1863, стр. 14—15.

в 1853 г. — членом Римской Академии Линчей и в 1856 г. — членом-корреспондентом Парижской Академии.

В работе Петербургской Академии наук Остроградский принимал чрезвычайно активное участие. Он давал отзывы на присылавшиеся в Академию исследования, читал циклы публичных лекций, выступал на конференциях Академии с научными докладами* и участвовал в работе разнообразных комиссий. Так, в период с апреля 1829 г. до июня 1830 г. он участвовал в работе двух комиссий по введению григорианского календаря в России и по астрономическому определению мест империи (совместная работа Академии наук и Главного штаба). В 1835—1837 гг. он участвовал в работах комитета для рассмотрения разных проектов сооружений в столице.

В 1837—1842 гг. Остроградский принимал участие в работах комиссии по исследованию возможности применения электромагнетизма для движения судов по способу, предложенному Б. С. Якоби, а в 1859 г. участвовал в работах комиссии по введению в России десятичной системы мер, весов и монет.

Интенсивная научная деятельность М. В. Остроградского продолжалась свыше тридцати лет, захватывая в свою орбиту все новые и новые области математики. В этот период не вышло ни одного тома трудов Академии, в котором не содержалось бы работ знаменитого математика.

Буквально с первых же дней приезда началась также педагогическая работа Остроградского в высших военно-учебных заведениях столицы и огромная просветительная деятельность, направленная на развитие математической культуры в России.

К краткому анализу научного творчества и педагогической деятельности Остроградского мы сейчас и перейдем.

* Остроградский прочел в Академии наук не менее 86 докладов (значительная их часть не опубликована), дал не менее 62 рецензий на работы; из них только 15 опубликовано (сведения взяты из доклада К. И. Кострюкова «Обзор архивных материалов о жизни и деятельности акад. М. В. Остроградского», прочитанного 26 сентября 1951 г. на сессии АН УССР, посвященной 150-летию со дня рождения М. В. Остроградского).

* *
*

Научное творчество М. В. Остроградского по своему стилю и направленности примыкает к французской математической школе первой половины XIX в. Серьезный интерес к математическому анализу, развитие широким фронтом исследований физических явлений с помощью математических методов, разработка общих принципов аналитической механики и непрекращающийся поток новых результатов в области небесной механики являются, пожалуй, наиболее характерными чертами знаменитой французской математической школы эпохи Остроградского. Имена Лапласа и Коши, Фурье и Ампера, Пуассона и ряда других первоклассных ученых определяли в то время лицо французской математики. Со многими из них, как мы уже отмечали выше, Остроградский был связан не только общей научной тематикой, но и узами личной дружбы.

Работая в смежных областях науки, Остроградский и его иностранные коллеги нередко публиковали почти одновременно мемуары на близкие темы и получали почти идентичные результаты. Это обстоятельство привело к тому, что бесспорный приоритет Остроградского во многих случаях незаслуженно забыт и полученные им результаты связываются как в иностранной, так и в отечественной литературе с другими именами.

Хорошо известно, что интерес Остроградского к задачам механики и небесной механики, а также математической физики возник еще в Харькове, задолго до первой поездки во Францию, под влиянием первого его учителя — Осиповского. В объяснении, данном 7 декабря 1820 г. совету Харьковского университета, Остроградский писал, что он желает «усовершенствовать себя по части наук, относящихся к прикладной математике».* Пребывание в Париже в окружении ученых первого ранга, создававших основы новой научной дисциплины — математической физики, позволило Остроградскому точнее очертить рамки его научных интересов. Позднее, уже будучи адъюнктом Петербургской Академии, он до-

* Архив АН СССР, разр. V.,оп. 1-о, № 11, лл. 35—36.

статочно четко сформулировал основное направление своих научных устремлений в рапорте, поданном правлению Академии 24 марта 1830 г. *

Поскольку этот рапорт может служить отправным пунктом для создания общей картины научных интересов Остроградского в первую половину его жизни, приведем из него значительный отрывок.

«Преемники Ньютона развили в самых мелких подробностях великий закон всемирного тяготения и сумели подвергнуть математическому анализу многие важные и трудные вопросы общей физики и физики невесомых веществ. Совокупность их трудов о системе мира составляет бессмертный труд небесной механики,** в котором астрономы еще долго будут черпать элементы своих таблиц; но физико-математические теории не объединены еще в одно целое; они рассеяны во множестве собраний академических мемуаров, они исследуются при помощи различных методов, часто весьма смутных и неполных; есть такие теории, уже сложившиеся и, однако, нигде не опубликованные.***

«Я ставлю себе целью объединить все эти теории, разработать их однородным методом и указать важнейшие их приложения. Я уже собрал необходимые материалы по движению и равновесию упругих тел, по распространению волн на поверхности несжимаемых жидкостей, по распространению тепла внутри твердых тел, и, в частности, внутри земного шара. Но эти теории составляют лишь необходимую часть всего труда, который должен заключить также распространение электричества и магнетизма в телах, способных быть наэлектризованными или намагниченными через влияние, электродинамическое явление, движение электрических флюидов, движение и равновесие жидкостей, действие капиллярности, распространение тепла в жидкостях и теорию вероятностей».

---

* Архив АН СССР, ф. 1, оп. 2, 1830, § 253.

** Остроградский имеет в виду пятитомный труд Лапласа «Небесная механика».

*** О распространении тепла в жидкостях, о температуре жилищ, о моральном ожидании и т. п. (*Примечание М. В. Остроградского*).

Мы видим, таким образом, что Остроградский стремился охватить единым математическим аппаратом буквально все известные тогда физические явления (за исключением акустики, оптики и механики). И если внимательно присмотреться к его опубликованным работам, а также к неопубликованным докладам, то можно заметить, что в первые годы его научной деятельности он упорно стремился осуществить свою грандиозную программу исследований.

Действительно, наряду с большой статьей о движении волн на поверхности жидкости, заключенной в цилиндрическом бассейне, а также позднее опубликованным кратким извлечением из доклада о распространении этих результатов на бассейн, имеющий форму цилиндрического сектора, он прочел в Академии общий доклад о распространении волн. Вместе с опубликованными работами по теории распространения тепла в твердых телах им был прочитан доклад на тему «О влиянии солнечной теплоты на температуру земного шара». Позднее к работам по теории распространения тепла в твердых телах Остроградский присоединил свои классические исследования по распространению тепла в жидкостях. Помимо цикла лекций по небесной механике, обработанных и изданных в виде монографии, Остроградский читал и эпизодические доклады на заседаниях Академии, посвященные той же тематике. К этому же направлению исследований следует присоединить его работы по теории притяжения тел.

Из программы Остроградского остался совершенно неразработанным пункт, касающийся теории магнетизма и электричества (если не считать двух эпизодических заметок о намагничивании железных брусков через индукцию). Это произошло, по-видимому, потому, что со второй половины 30-х годов его интересы уходят все больше и больше в сторону механики. И нужно сказать, что в этой области науки ему принадлежит значительный вклад. В частности, наряду с Гамильтоном и К. Якоби, он является творцом общих принципов аналитической механики и вместе с ними завершает важный этап в развитии этой науки.

Совершенно естественно, что исследования Остроградского в области математической физики и аналитической механики толкали

его на разработку проблем математического анализа. И действительно, мы не раз получим возможность убедиться в том, что многие фундаментальные идеи и результаты в области математического анализа, принадлежащие Остроградскому, непосредственно связаны с его работами по математической физике или механике. Однако исследования Остроградского в области математического анализа не ограничиваются теми разделами, которые могут рассматриваться как аналитический аппарат прикладной математики. Ряд его исследований представляет собой разработку общетеоретических разделов математического анализа. В то же время в круг его интересов входили алгебра, теория вероятностей, теория чисел и геометрия.

Из собственно математических исследований мы должны отметить еще значительные работы Остроградского по внешней баллистике сферических снарядов, представлявшие в то время значительный практический интерес. Эти изыскания носили не только теоретический характер, но и сопровождались вычислением таблиц и экспериментальными работами. Не все, что было найдено Остроградским в этом направлении, опубликовано. Известно, например, что 16 декабря 1842 г. он сделал в Академии наук доклад «О влиянии выстрела на лафет орудия».* Однако никаких материалов, по которым можно было бы судить о полученных результатах, а также об исходных предпосылках, в архиве найти не удалось.

В приведенной нами научной программе Остроградского, которую он осуществлял в течение, примерно, десяти первых лет жизни в Петербурге, естественно, не нашлось места для его педагогических интересов. А они носили не только характер непосредственной преподавательской деятельности, но и характер научных исследований частнометодического и общепедагогического значения. Заметим вдобавок, что педагогические работы наводили Остроградского на мысль о проведении и собственно математических исследований. Впоследствии мы подтвердим это примерами.

* Архив АН СССР, ф. 1 оп. 1-а, № 66, протоколы конференции Акад. наук, № 328.

После приведенных общих замечаний мы можем перейти к обзору научных работ Остроградского. Наличие примечаний ко всем помещенным в настоящем сборнике работам позволяет ограничиться лишь общей характеристикой научного творчества Остроградского.

* *
*

По математической физике Остроградский написал 15 работ. Большая часть их относится к задачам теории распространения тепла, теории упругости и гидродинамики. Гидродинамике Остроградский посвятил четыре исследования, если не считать трех отзывов на сочинения Н. Д. Брашмана и А. Ю. Давидова, которые были представлены на соискание демидовских премий Академии наук. Наибольшее значение имеют две из указанных работ, а именно: «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» и «О движении жидкостей».

Первые по времени работы по теории волн на поверхности жидкости принадлежат Коши (1815 г.) и Пуассону (1816 г.). Оба автора ограничились исследованием вопроса для бассейнов бесконечной глубины и бесконечной протяженности. Исследование волн на поверхности жидкости, находящейся в бассейне конечной глубины и конечных размеров, впервые было выполнено Остроградским и сдано в печать в 1826 г. Через три года вышла в свет работа Пуассона на ту же тему.

Несколько позднее, 17 сентября 1829 г., Остроградский сделал сообщение в Петербургской Академии наук о продолжении упомянутых его исследований и о распространении их результатов на бассейн, имеющий форму кругового сектора. К сожалению, в имеющемся сообщении дана лишь краткая информация об этой работе, не содержащая ни окончательных результатов, ни описания методов, которыми была решена задача. Не обнаружены до сих пор и рукописи (даже в черновиках) указанного исследования, так же как и доклада о нем. Это решение не найдено до сих пор и другими исследователями, хотя его результаты и имеют непосредственный практический интерес.

Третья работа, посвященная гидродинамике, содержит исследование условий равновесия несжимаемой жидкости. Эта статья находится в тесной связи с работами Остроградского по общей механике.

Последняя работа рассматриваемого цикла «О движении жидкостей» посвящена доказательству положения, вошедшего в науку под названием теоремы Томсона * и состоящего в том, что поверхность жидкости состоит из одних и тех же частиц. До Остроградского это положение принималось в гидродинамике в качестве особой гипотезы; наш же ученый показал, что оно является следствием уравнений движения жидкости и уравнения неразрывности. Заметим, что Остроградский получил и опубликовал свой результат за четыре года до Томсона.

Мы не останавливаемся сейчас на тех математических новинках, которые по ходу дела пришлось применить Остроградскому в этих работах, отложив это до обзора его результатов в области математического анализа.

Пожалуй, наибольшее научное значение из всех исследований Остроградского в области математической физики имеют его работы по теории теплоты. Эти исследования, помимо того, что они содержат важнейшие результаты, относящиеся непосредственно к теории распространения тепла, имеют огромное общематематическое значение, поскольку в них, с одной стороны, заложены начала для ряда важных теорий, развивающихся и в наше время, а с другой стороны, в них получены теоремы, являющиеся одними из центральных результатов математического анализа. Особенно важна с указанных точек зрения первая из его заметок на эту тему, представленная им Петербургской Академии наук еще в 1828 г.

Знаменитая «Аналитическая теория теплоты» Фурье вышла в свет в 1822 г.; для решения большого числа задач в ней был широко использован единый общий прием — представление искомого решения в виде тригонометрического ряда. Метод оказался исключительно

* См., например: А. Саткевич. Аэродинамика как теоретическая основа авиации. Пгр., 1923, стр. 29; Г. Ламб. Гидродинамика. ГТТИ, 1947, стр. 20—21.

плодотворным, и, несмотря на то, что примерно за сто лет до Фурье этот прием применялся Д. Бернулли и Л. Эйлером в задаче о распространении звука и при изучении движения луны, он получил наименование метода Фурье, а тригонометрические ряды — наименование рядов Фурье.

Роль Остроградского в развитии теории распространения тепла прекрасно охарактеризована в речи В. А. Стеклова, произнесенной им в Полтаве по случаю столетия со дня рождения Остроградского. Мы ограничимся пересказом соответствующих мест речи: «После того как Фурье было составлено дифференциальное уравнение распространения теплоты в твердом теле, явилась необходимость указать приемы определения искомой температуры тела согласно с условиями задачи. Эта задача в общем случае представляла громадные трудности, и исследования, естественно, начались с возможно простых случаев, на которых отчетливее выступают особенности задачи. Сам Фурье, а также Пуассон рассмотрели случаи охлаждения твердого шара, цилиндра, куба и прямоугольного параллелепипеда.

«Во всех этих случаях Фурье применял один и тот же метод, известный теперь под именем метода Фурье, но едва ли он сам усматривал всю общность своего приема. По крайней мере из исследований Фурье этого не видно, и я едва ли ошибусь, если скажу, что метод Фурье во всей своей общности был впервые сформулирован Остроградским, а затем уже (в 1829 г.) Ляме и Дюгамелем. В рассматриваемом мемуаре Остроградского содержится как бы целая программа решения общего вопроса об охлаждении какого угодно твердого тела, ограниченного поверхностью без особых точек и линий (сфероида, как тогда называли) и одновременно с этим ставится ряд общих задач анализа».*

Наряду с созданием общих методов решения задачи распространения тепла в твердых телах, Остроградский занимался получением окончательной формы решения в различных частных случаях. Ему

* В. А. Стеклов. О работах М. В. Остроградского в области математической физики. В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 122.

принадлежит, в частности, успех решения задачи для случая многогранника, более сложного чем параллелепипед. Именно он решил задачу для призмы, основанием которой служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Это исследование Остроградского не было им самим опубликовано, и указанный результат известен только по публикациям известного математика и механика Ляме, который до 1832 г. работал профессором Петербургского института путей сообщения. В работе «О распространении тепла в многограннике», доложенной в 1829 г. Петербургской Академии наук, Ляме привел соответствующие формулы и упомянул, что они раньше были получены Остроградским. Позднее, в специальной монографии, Ляме отвел случаю Остроградского целую главу, указав, что изучаемая в ней задача была впервые поставлена и решена Остроградским.*

Создание математической теории распространения тепла в жидкости было начато Фурье, который опубликовал в 1820 г. без доказательства полученное им для этой задачи дифференциальное уравнение. Вывод этого уравнения впервые был дан Остроградским и Пуассоном в 1829 г. Уравнение Пуассона было несколько отлично от уравнения Остроградского, но впоследствии Пуассон отказался от своего уравнения и поместил в «Аналитической механике» вывод уравнения Остроградского.

В 1830 г. умер Фурье. При разборке его архива был найден и в 1833 г. опубликован мемуар, в котором подробно излагался вывод уравнения распространения тепла в жидкости. Познакомившись с этой работой Фурье, Остроградский откликнулся на нее докладом в Академии наук (30 IX 1836) на тему: «О доказательстве, данном Фурье для дифференциального уравнения, относящегося к распространению тепла в жидкости». Внимательный анализ физических предпосылок, положенных Фурье в основу вывода дифференциального уравнения распространения тепла в жидкости, привел Остроградского к заключению, что они даже в малой степени не отражают истинную картину явления. Точно так же предпосылки Пуассона

* Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris, 1861 (leçons 7, §§ 70—73, стр. 120—128).

и самого Остроградского в работе 1829 г. были подвергнуты им критическому анализу. Этот краткий критический анализ предшествует второй работе Остроградского, комментарий к которой помещен в настоящем сборнике.

Работа Остроградского представляет интерес по тому методу, который был в ней предложен. На это следует обратить особое внимание. Вместо того, чтобы рассматривать элементарные параллелепипеды, как это практиковалось в то время и встречается даже в наши дни, Остроградский выделял из жидкости некоторый произвольный объем и составлял интегральное уравнение, описывающее явление для этого объема. Заметив далее, что это уравнение должно быть справедливо для любого объема, выделенного из жидкости, он приравнивал нулю подинтегральную функцию и получал искомый результат. Этот прием теперь постоянно употребляется в математической физике и должен связываться с именем его истинного автора — М. В. Остроградского.

Теория упругости, первые основания которой были положены еще Галилеем, была позднее предметом исследований Гука, Д. Бернулли, Л. Эйлера и других исследователей. Интерес к ней неизмеримо возрос в начале XIX в., после того как в цикле работ, начатом в 1819 г., Навье вывел дифференциальные уравнения равновесия и движения упругих тел. Далее вопросы теории упругости заинтересовали Коши, Пуассона, Ляме и Остроградского. Три работы последнего из названных ученых, посвященные теории упругости, исходят из старой однопараметрической теории Навье, согласно которой два коэффициента Ляме (эти коэффициенты были введены в науку после того, как Остроградский опубликовал свои работы) λ и μ для упругого изотропного тела равны между собой. Два мемуара Остроградского, представленные Академии наук (первый в 1829 г., а второй в 1832 г.), посвящены одной задаче — распространению малых колебаний в бесконечной упругой среде. Время появления этих мемуаров почти точно совпадает со временем появления двух мемуаров Пуассона на ту же тему.*

* Подробное сравнение результатов и качества примененных этими авторами методов см. в «Примечаниях».

В работе «Об интеграле, встречающемся в теории притяжения сфероидов» Остроградский продолжил исследования Лагранжа и Лапласа. Лаплас обратил внимание, что для сил притяжения масс, находящихся одна вне другой, потенциал удовлетворяст дифференциальному уравнению, известному теперь под наименованием уравнения Лапласа. В 1813 г. Пуассон заметил, что это уравнение должно быть заменено на иное, когда притягивающаяся материальная точка лежит внутри притягивающей массы. Это уравнение носит наименование уравнения Пуассона. Остроградский в 1828 г. предложил другой вывод уравнения Пуассона и в примечании к работе сделал замечание, что результаты им были получены, когда он ничего не знал о заметке Пуассона 1813 г.

Интересно отметить, что в одной из глав «Математических упражнений» Коши (1831 г.) был дан вывод уравнения Пуассона, совпадающий даже в деталях с выводом Остроградского. При этом Коши отметил, что на возможность такого вывода ему указал Остроградский.

Отметим, наконец, две небольшие заметки, которые Остроградский опубликовал под общим названием «О взаимном намагничивании разобщенных брусков». Во вводной части статей указано, что они появились в результате решения задачи, предложенной известным физиком (впоследствии петербургским академиком) Б. С. Якоби. Эта задача состоит в следующем: железные бруски расположены вдоль прямой на одинаковых расстояниях между смежными брусками. Крайние бруски намагничиваются; по индукции намагничиваются и внутренние бруски. Спрашивается, каково будет магнитное состояние каждого из брусков?

Остроградский предложил два решения: одно с помощью степенных рядов, другое — посредством составления уравнений в конечных разностях. Во второй заметке рассматривается та же задача при условии, что намагничивается один из внутренних брусков.

* *
*

Т е о р е т и ч е с к о й м е х а н и к е, включая задачи внешней баллистики, Остроградский посвятил 18 работ; среди них два больших курса: «Курс небесной механики» и «Лекции по аналитиче-

ской механике». Оба эти курса оригинально построены, содержат новые научные результаты, принадлежащие автору, а также уделяют много внимания принципиальным вопросам науки, в том числе и общефилософским.

В то время, когда началась и развернулась в полную силу научная деятельность Остроградского, всю свежесть новизны еще имела известная «Аналитическая механика» Лагранжа, вышедшая вторым изданием в 1813—1816 гг. Остроградский, вообще склонный к наиболее общим решениям, не мог пройти мимо тех общих методов, которые были положены в основу аналитической механики одним из ее творцов. В ряде мемуаров, а также в курсах лекций Остроградский настолько существенно дополнил и развил эти методы, что заслуженно считается создателем как основных принципов аналитической механики, так и ряда конкретных ее разделов.

Все работы Остроградского по механике можно разбить, как это было сделано Н. Е. Жуковским, на три группы: работы, связанные с началом возможных перемещений, с дифференциальными уравнениями механики и с решением частных задач механики.

Первое сообщение Остроградского по механике («Заметка о вариации произвольных постоянных в проблемах механики») было им сделано Петербургской Академии наук в начале ноября 1829 г. (напечатана в 1831 г.). В ней он обобщил результаты Лагранжа, изложенные последним в упомянутой только что «Аналитической механике» в связи с интегрированием уравнений динамики.

Три работы Остроградского: «Общие соображения относительно моментов сил», «Мемуар о мгновенных перемещениях системы, подчиненных переменным условиям» и «О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции», написанные одна за другой (1834, 1838 и 1841 гг.), посвящены обобщению принципа возможных перемещений.

В первом из названных мемуаров Остроградский развил мысль о распространении метода возможных перемещений на системы с освобождающими связями при условии, что полная работа сил равна нулю или меньше нуля. Лагранж рассматривал только удерживающие связи. Свои результаты Остроградский применил к рас-

смотрению систем с неудерживающими связями из области механики системы, гибкой нерастяжимой нити, несжимаемой жидкости. Интересно отметить, что в этом мемуаре Остроградский впервые воспользовался аппаратом так называемых квазикоординат, появление которых связывается с именами Больцмана и Гаммеля, введших их в рассмотрение примерно на 60 лет позднее.

Во второй из указанных работ были установлены в общем виде уравнения движения системы в предположении, что система подчинена нестационарным связям, которые могут зависеть и от времени и от скорости. Эта работа представляет серьезное обобщение результатов Лагранжа, поскольку последний ограничился рассмотрением только стационарных и притом удерживающих связей.

Последняя из названных статей посвящена критике некоторых неточностей, которые заметил Остроградский в курсе механики Пуассона; в частности, она содержала возражения на имеющееся там изложение начала Даламбера. Полемизируя с Пуассоном, Остроградский дал здесь свое определение возможного перемещения как такого, которое в соединении с действительным перемещением не нарушает уравнений связи. Заканчивается статья возражением против мнения о фиктивности сил инерции, которым Остроградский придавал реальное значение.

К рассмотренному циклу статей идейно примыкает небольшая «Заметка об уравнениях движения материальной точки, помещенной внутрь прямолинейной трубки, вращающейся вокруг заданной оси» (1838 г.), которая может рассматриваться как иллюстрация общих положений автора.

Как ни значительны результаты Остроградского в направлении, связанном с началом возможных перемещений, еще большее значение нужно придать его исследованиям в направлении интегрирования дифференциальных уравнений механики. Мы остановимся вкратце на первой из работ этого направления «Об интегралах общих уравнений динамики» (1848 г.)

В 1834 г. английский ученый Гамильтон показал, что, в предположении существования силовой функции, дифференциальные уравнения движения системы точек при наличии стационарных

связей могут быть записаны в особой форме, которая называется теперь канонической.* В результатах Гамильтона особую роль играла функция, названная им главной. Как заметил А. М. Ляпунов, «при всей важности этого открытия, оно не могло иметь особенного практического значения вследствие сложности условий, поставленных Гамильтоном для определения главной функции».**

В работах 1837 г. Якоби показал, что результат Гамильтона допускает обобщение, при котором вместо главной функции может рассматриваться другая, представляющая любое решение некоторого дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.*** Это замечание приводило к особому методу интегрирования дифференциальных уравнений механики, который Якоби изложил в указанных работах, ограничившись случаем системы свободных точек. Впоследствии он обобщил этот результат на тот случай, когда между точками системы существуют связи. Никаких публикаций на этот счет Якоби не сделал, и только в 1866 г. его лекции, прочитанные в Кенигсбергском университете зимой 1842/43 г. и записанные Борхардтом, были изданы Клебшем;**** в девятнадцатой лекции как раз содержится указанный результат.

Однако Остроградский знать об этом результате не мог, так как публикация произошла уже спустя почти пять лет после его смерти. Таким образом, Остроградскому были известны только мемуары Якоби 1837 г.; о результатах Якоби, которые были в них опубликованы, он даже докладывал Академии (доклад не напечатан). В работе 1848 г. Остроградский обобщил результаты Гамильтона и Якоби на тот случай, когда связи и силовая функция явно́ зависят от времени. Им было показано, что в этом случае можно получить такое

---

* Phil. Trans., 1834, стр. 247; 1835, стр. 95.

** А. М. Ляпунов. Заслуги М. В. Остроградского в области механики. В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский, стр. 116.

*** Journ. fur Math., Bd. 27, 1837, стр. 97; Journ. de Math., v. 3, 1837, стр. 60.

**** Имеется русское издание: К. Якоби. Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.

дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, что если известен полный интеграл этого уравнения, то интегралы канонической системы получаются путем дифференцирования полного интеграла по обобщенным координатам и произвольным постоянным. Этот же результат, как мы уже говорили, был опубликован позднее в лекциях К. Якоби.

Имя Остроградского не должно забываться при изложении соответствующего раздела механики, так как он наряду с Гамильтоном и Якоби привел его развитие к современному состоянию. Это тем более необходимо, что в том же 1848 г. им был опубликован самый большой его мемуар «Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к задаче об изопериметрах». В этом мемуаре Остроградский обобщает свои результаты, полученные первоначально для уравнений динамики, на случай дифференциальных уравнений общей вариационной задачи. Из них как частный случай получались результаты Гамильтона, Якоби и самого Остроградского, относящиеся к уравнениям механики.

Вариационные принципы механики были предметом переписки Остроградского с Н. Д. Брашманом. После смерти Остроградского его письма, посвященные указанному предмету, были опубликованы.

В большом исследовании «Мемуар об общей теории удара» Остроградский применил методы аналитической механики к важной задаче, не рассматривавшейся Лагранжем и бывшей предметом изучения Карно в одном частном случае. В работе Карно была доказана теорема, относящаяся к абсолютно неупругому удару двух тел и состоящая в том, что при ударе происходит потеря живой силы, равная живой силе, соответствующей потерянной скорости. В работе Остроградского был дан общий метод определения скоростей точек произвольной системы при ударе о неупругую связь. При этом выяснилось, что теорема Карно обобщается и на рассматриваемый Остроградским общий случай.

Эта работа Остроградского привлекла внимание современников и послужила поводом для дискуссии в Парижской Академии наук между Коши, Бертраном, Дюгамелем и Понселе на тему: кто пер-

вый обобщил приведенную выше теорему Карно? Однако если и были какие-либо частные обобщения теоремы Карно до мемуара Остроградского, то никто и никогда не оспаривал, что именно ему принадлежит общий метод решения задач теории удара.

Это обстоятельство неоднократно подчеркивалось в литературе. Так, И. И. Сомов писал, что Остроградский «имел главной целью показать весь ход анализа при определении количества движения, полагая, что связи выражены не только уравнениями, но и неравенствами; обстоятельство, которое до сих пор упускают из виду французские ученые».*

Точно так же А. М. Ляпунов, говоря о споре французских ученых по поводу обобщения теоремы Карно, заявил: «Если, однако, названное обобщение и было сделано раньше, то этим нисколько не умаляется важность рассматриваемого мемуара, значение которого обусловливается не этим обобщением, естественно вытекавшим из анализа Остроградского, а тем, что в мемуаре этом дается общий способ решения вопросов теории удара».**

Остроградский не был кабинетным ученым. В целом ряде исследований и статей он откликался на вопросы, интересовавшие общество. Злободневными вопросами, стоявшими перед русской артиллерией, были вызваны к жизни три работы Остроградского, посвященные внешней баллистике. В этих работах изучался полет сферического снаряда (на вооружении армий в ту пору были гладкоствольные орудия, стрелявшие сферическими снарядами); это изучение сопровождалось расчетом таблиц и постановкой специальных экспериментов, в том числе и на полигонах.

В двух работах, доложенных Академии в конце 1840 г. и затем напечатанных в ее изданиях под названиями: «Заметка о движении сферического снаряда в сопротивляющейся среде» и «Мемуар о движении сферического снаряда в воздухе», Остроградский вывел и изучил дифференциальные уравнения движения сферического сна-

---

* И. И. Сомов. Очерк жизни и ученой деятельности Михаила Васильевича Остроградского. Записки Акад. наук, т. 3, 1863, стр. 1—29.

** А. М. Ляпунов. О заслугах М. В. Остроградского в области механики. В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский, стр 118.

ряда. Здесь интересы Остроградского вновь пересеклись с интересами Пуассона, который незадолго перед этим исследовал движение сферического снаряда в воздухе в предположении, что расстояние между центром тяжести и геометрическим центром снаряда мало. Остроградский в своих исследованиях пошел дальше Пуассона и уже не делал этого предположения. Для практических целей это обстоятельство имело важное значение, так как в реальных сферических снарядах указанная величина достигала значительных размеров. В качестве частного случая результаты Пуассона содержались в результатах Остроградского.

В связи с указанными исследованиями Остроградским были рассчитаны и опубликованы «Таблицы для облегчения вычисления траектории тела в сопротивляющейся среде». Речь шла о табулировании функции $\Phi(\theta)=2\int\frac{d\theta}{\sin^3\theta}$. Позднее, как заявил в отчете Академии за 1843 г. П. Фусс, «г-н Остроградский в своих исследованиях по баллистике, которыми он занимается уже много лет, пришел к вопросу о движении маятника в воздухе в тех предположениях о сопротивлении и трении воздуха, которые принимаются обычно при изучении движения снарядов». Известно, что 30 июня 1843 г. Остроградский делал доклад: «Движение маятника в воздухе». Однако этот доклад не напечатан.

О том же направлении исследований Остроградского говорится также в предисловии к книге Н. С. Будаева «Теория маятника», где сказано: «. . .я говорю о сочинении „Теория маятника“ нашего геометра Мих. Вас. Остроградского. Оно не только не напечатано, но и далеко не кончено и было брошено автором лет десять назад. В нем помещено всего только шесть нумеров, в которых и выводится дифференциальное уравнение движения маятника и вычисляются коэффициенты этого уравнения для шаровой формы маятника. Эти шесть нумеров приведены мною буквально».

Сказанным не исчерпывается вклад Остроградского в артиллерийскую науку. Так, в конце 1842 г. в Академии наук он сделал доклад «О влиянии выстрела на лафет орудия» (работа не напечатана, рукопись не найдена). В самом конце жизни Остроградский

в течение двух лет читал курс баллистики в Артиллерийской академии. Интересами в области артиллерийского дела была вызвана к жизни его статья «Об определенных квадратурах», в которой он дал оценку остаточного члена формулы суммирования Эйлера-Маклорена, а также работа «Об одном вопросе теории выроятностей».

Мы заключим наш краткий очерк о роли Остроградского в развитии механики прекрасными словами Н. Е. Жуковского: «Большая часть ученых работ Остроградского относится к его любимому предмету — аналитической механике. Он писал по разнообразным вопросам этого предмета: по теории притяжения, по колебанию упругого тела, по гидростатике и гидродинамике, по общей теории удара, по моменту сил при возможных перемещениях и т. д. Во всех его работах главное внимание сосредоточивалось не на решении частных задач, а на установлении общих теорий. Он с особенной любовью занимался расширением метода Лагранжа о возможных скоростях и установлением на самых общих началах теорем динамики. Его обширная работа „Об изопериметрах" заключает в себе, как частные случаи, различные предложения Лагранжа, Пуассона, Гамильтона и Якоби об интегрировании уравнений динамики. С именем Остроградского всегда будет связано распространение способа возможных перемещений на системы с освобождающими связями и изложение теорем динамики с помощью рассмотрения вариаций координат, происходящих от изменения произвольных постоянных».*

* *
*

Математический анализ, бурно развивавшийся в XVIII в. и получивший еще в работах Ньютона (а позднее Эйлера, Д. Бернулли, Лагранжа и других крупнейших математиков) многочисленные важные приложения, естественно оказался в центре научных интересов Остроградского. Уже первые его работы, относящиеся к математической физике, содержат огромное количество

* Н. Е. Жуковский. Полн. собр. соч., т. 7, М.—Л., 1950, стр. 221.

чисто аналитических идей и результатов, которые и до сих пор служат предметом детального исследования. Многие открытия Остроградского были позднее повторены последующими авторами, войдя в науку под их именами; имя же истинного их творца незаслуженно забывалось. Нередко случалось, что Остроградский одновременно или почти одновременно с другими учеными приходил к новым результатам; в этих случаях имя русского исследователя также предавалось забвению.

Подобно тому, как это случилось в механике и в математической физике, не все достижения Остроградского в области анализа опубликованы, а многие даже и не записаны. В ряде случаев он ограничился тем, что доложил эти результаты в Академии, а оформление их отложил и не осуществил. Так, для нас потеряны его исследования по теории функции $\Gamma(x)$, о которых он докладывал в 1858 г. Не сохранились даже черновые наброски его докладов «О кривизне поверхности» (1856 г.), «Об одной системе алгебраических уравнений» (1857 г.) и др.

В рукописях, хранящихся в Государственной публичной библиотеке УССР, имеется 1370 полулистов большого формата, из которых 1250 написаны рукой Остроградского. Хотя среди них нет цельных произведений и даже тезисов неопубликованных докладов, тем не менее имеется большое количество отрывочных записей и набросков доказательств, методологических высказываний, отдельных идей, которые были неизвестны науке. Мы укажем впоследствии, что проф. Е. Я. Ремезу удалось расшифровать два наброска, записанные на клочках бумаги. Оказалось, что эти краткие записи содержат весьма интересный алгоритм для представления иррациональных чисел в виде быстро сходящихся знакопеременных рядов.

Первые сведения о самостоятельных занятиях Остроградского вопросами математического анализа относятся к 1825 г.; в статье Коши «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами» сказано, что Остроградский получил некоторые ранние его результаты по теории интегрирования в комплексной области другим путем. Позднее Остроградский опубликовал в изда-

ниях Петербургской Академии статью на близкую тему: «Заметка об определенных интегралах». В ней он показал, что если в двойном интеграле подинтегральная функция не ограничена в области интегрирования, то результат интегрирования может зависеть от порядка интегрирования, а также оценил соответствующую разность. Полученную формулу Остроградский применил к рассмотрению двух примеров, из которых в одном были рассмотрены комплексные пределы. В этой работе можно видеть начала теории вычетов.

Непосредственно математическому анализу посвящено почти 20 работ Остроградского; однако, как мы уже говорили, в ряде других его исследований из области математической физики и механики имеется значительная собственно математическая часть. Зачастую аналитические методы и результаты, полученные Остроградским в связи с решением задач математической физики или механики, получали широкую известность именно в математическом анализе и излагаются в настоящее время во всех более или менее полных учебниках.

Уже в первой самостоятельной работе Остроградского, посвященной распространению волн на поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне, с полной отчетливостью выделен метод решения дифференциальных уравнений посредством рядов по фундаментальным функциям. Этот метод позднее вновь был им использован в работе «Заметка о теории тепла» (1828 г.). Обоснование таких разложений для одномерного случая было осуществлено только в 1896 г. В. А. Стекловым.

Вообще первую работу по теории теплоты нужно считать источником новых аналитических идей и результатов. В ней фактически было введено понятие сопряженного дифференциального оператора и доказано, что собственные функции данного оператора и сопряженного ортогональны. Здесь же дается схема доказательства законности разложения функций в ряд Фурье (по тригонометрическим функциям). Только много позднее это было выполнено полностью Дирихле и Лобачевским.

В этой же статье сформулирован — задолго до Римана — так называемый принцип локализации, который в современной форму-

лировке состоит в следующем: сходимость ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции в точке x зависит лишь от значений ее в сколь угодно малой окрестности этой точки. Этот же результат Остроградский вторично сформулировал в «Курсе небесной механики».

В этой же работе была выведена знаменитая формула, связывающая интеграл по объему с интегралом по поверхности. Формула

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \qquad (1)$$

вошедшая теперь во все учебники математического анализа и математической физики, получила наименование формулы Остроградского-Гаусса, хотя Остроградский получил ее в общем виде в 1828 г., а Гаусс только в 1841 г. и притом лишь для потенциала эллипсоида. Интересно отметить, что многие иностранные авторы отмечали приоритет русского ученого в выводе этой формулы. Так, например, Максвелл писал: «Эта теорема была впервые дана Остроградским в 1828 г.».*

В «Мемуаре об исчислении вариаций кратных интегралов» (1834 г.) Остроградский обобщил формулу (1) на случай n-кратного интеграла. В двух позднейших исследованиях «Об одном замечании относительно определенных интегралов, относящихся к теории ортогональных поверхностей» (1840 г.) и «Об одном определенном интеграле» (1860 г.) он изучил частные случаи этой общей формулы.

«Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов» был оценен еще современниками. Об этом мы можем судить хотя бы по тому, что его полностью воспроизвел английский историк математики Тотгентер в своей книге «История развития вариационного исчисления в течение девятнадцатого века» (1861 г.). Однако нужно сказать, что при жизни Остроградского не все результаты, полученные в указанном произведении, были замечены. Это видно из того, что Парижская Академия в 1840 г. объявила премию за решение

* A Treatise on electricity and magnetism, v. I, 1873, стр. 117.

проблемы отыскания экстремума кратного интеграла, хотя за шесть лет до этого проблема была полностью решена Остроградским. Премия была присуждена в 1848 г. французскому математику Саррюсу за работу «Исследования по вариационному исчислению»,* содержавшую ошибочные заключения в основных выводах. Один из учеников Остроградского Е. Ф. Сабинин в ряде работ полностью восстановил приоритет учителя.

Мы теперь в нескольких словах отметим важнейшие результаты, содержащиеся в рассматриваемой работе 1834 г. Пусть $x, y, z, \ldots$ — независимые переменные, функция $L(x, y, z, \ldots)$ имеет производные и обладает тем свойством, что неравенству

$$L(x, y, z, \ldots) < 0 \tag{2}$$

удовлетворяют только точки с ограниченными координатами $x, y, z, \ldots$ Уравнение

$$L(x, y, z, \ldots) = 0 \tag{3}$$

определяет границу области, в которой имеет место неравенство (2). Пусть далее $P, Q, R, \ldots$ — функции тех же аргументов, однозначные и непрерывные в области (2) вместе со своими производными. Тогда:

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \ldots\right) dx\, dy\, dz \ldots = \int \frac{P\frac{\partial L}{\partial x} + Q\frac{\partial L}{\partial y} + R\frac{\partial L}{\partial z} + \ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \ldots}}\, ds; \tag{4}$$

в этой формуле первый интеграл распространяется на область (2), а второй — на ее границу (3).

Опираясь на указанную формулу, Остроградский вывел производную по параметру от n-кратного интеграла. Если функции U и L зависят не только от независимых переменных, но и от параметра α, то:

$$\frac{d}{d\alpha}\int U\, dx\, dy\, dz \ldots = \int \frac{\partial U}{\partial \alpha}\, dx\, dy\, dz \ldots - \int U \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \ldots}}. \tag{5}$$

---

* Mémoires presentés par divers savants á l'Acad. royale des sci. de l'Institut de France, v. 10, 1848.

Только что указанная формула привела Остроградского к выводу выражения для вариации кратного интеграла. Там же дан общий способ вычисления вариации частной производной от функции с любым числом переменных, так же как и вариации выражения, зависящего от функции и ее частных производных любых порядков.

В работе 1860 г. рассмотрен частный случай формулы (4), а именно, когда уравнение границы таково:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots=1,$$

а функции P, Q, R, ... определяются равенствами:

$$P=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y},\ldots,$$

где u и v — однородные функции соответственно порядков m и n $(m\neq n)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\ldots=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\ldots=0.$$

В этом случае равенство (4) принимает такой вид:

$$\int uv ds=0.$$

Интересно указать причину появления этой последней статьи. В напечатанном тексте имеется только глухая фраза на этот счет, с которой и начинается статья: «Из частной переписки мне стала известна формулировка теоремы, которая имеет место для функций Лапласа». В рукописях Остроградского, хранящихся в Государственной публичной библиотеке УССР в Киеве, удалось найти переписанный на́бело текст этой статьи, в котором начало написано более определенно (л. 755).

Вот первоначальное вступление к статье: «На последнем заседании Академии г. Чебышев показал мне письмо, которое ему прислал г. Эрмит и в котором этот знаменитый геометр сообщает одну теорему, аналогичную той, которая имеет место для функций Лапласа, но более общую тем, что распространяется на любое число переменных. Но его теорема, о которой идет речь, содержится в еще более общем предложении, которое было дока-

зано нами уже давно. В мемуаре „Об исчислении вариаций в кратных интегралах“ находится следующее соотношение...» [далее указана формула (5), приведенная нами ранее].

Значительный цикл работ Остроградского относится к теории интегрирования алгебраических функций. Этот цикл открылся в 1833 г. тремя статьями, доложенными Академии последовательно в марте, июле и августе и носящими названия: «Мемуар об интегрировании рациональных дробей», «Заметка о соотношении, которое может быть между интегралами алгебраических функций», «Продолжение мемуара об интегрировании рациональных дробей».

Значительно позднее последовали еще две работы на ту же тему: «Об интегрировании алгебраических функций» (1842 г.) и «Мемуар об интегрировании рациональных функций» (1844 г.). Вопросом интегрирования алгебраических функций одновременно и независимо занимались также Абель и Лиувилль. Но работы Абеля появились в печати лишь после его смерти в 1839 г., а работы Лиувилля были напечатаны в сентябре 1833 г., тогда как основной результат на ту же тему был доложен и сдан в печать Остроградским еще в июле 1833 г. Таким образом, нужно признать, что Остроградский, наряду с Абелем и Лиувиллем, является создателем теории интегрирования алгебраических функций.

В первой из названных работ Остроградский рассмотрел следующий вопрос: имеется рациональная функция $R(x, y)$ двух переменных x и y, где y есть алгебраическая функция, определяемая уравнением

$$y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$

в котором коэффициенты A_k являются рациональными функциями одного x. Какой вид имеет интеграл $\int R(x, y)\,dx$ в том случае, когда он является алгебраической функцией?

Оказалось, что общий вид алгебраического интеграла есть целая рациональная функция y степени $n-1$ с коэффициентами, представляющими собой рациональные функции x. Отсюда следует,

что если требуется проинтегрировать рациональную функцию $R(x)$ (в этом случае $n=1$), то алгебраическим интегралом от нее может быть только рациональная функция x.

Далее Остроградский сделал простые, но полезные замечания: интеграл не может быть алгебраической функцией, если 1) после выделения целой части из подинтегральной функции останется рациональная дробь, в которой степень многочлена, стоящего в числителе, только на единицу меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, и 2) знаменатель не имеет кратных корней.

Если интеграл выражается алгебраической функцией, то ее знаменатель равен наибольшему делителю знаменателя подинтегральной дроби и его первой производной; числитель же может быть найден методом неопределенных коэффициентов. В таком виде метод сложен, особенно когда приходится иметь дело с многочленами от x высокой степени. Для этого случая Остроградский предложил два других приема, основанных на последовательном делении, т. е. в конечном счете — на разложении в непрерывные дроби.

Во втором из указанных мемуаров Остроградский приложил полученные им общие результаты, о которых только что шла речь, к случаю, когда y определяется из уравнения

$$y^2-R(x)=0,$$

в котором $R(x)$ есть полином от x. В этом случае интеграл

$$\int F(x, y)\,dx,$$

где $F(x, y)$ — рациональная функция от x и y, может быть разбит на сумму двух интегралов:

$$\int \frac{L}{M}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{L_1}{M_1}\cdot\frac{dx}{y},$$

где L, M, L_1, M_1 — многочлены от x.

Относительно второго из этих интегралов Остроградский доказал, что если он выражается алгебраической функцией, то эта

функция равна $\frac{X}{Y}y+C$, где X и Y — многочлены от x, а C — постоянная. Далее он указал способ разыскания многочленов X и Y. В заключение Остроградский заявил, что ему удалось найти второй интеграл и в том случае, когда он сводится к функциям не только алгебраическим, но также и к алгебраическим и логарифмическим.

В последнем из указанных мемуаров Остроградский поставил и разрешил задачу об отделении алгебраической части интеграла от рациональной дроби. Этот результат завершил теорию интегрирования рациональных функций и излагается теперь во всех полных курсах математического анализа. Спустя почти три десятилетия после опубликования этого исследования Остроградского появилась в печати работа французского математика Эрмита,* в котором рассматривался тот же вопрос и давалось то же решение, о котором мы уже говорили. Сказанное достаточно убедительно показывает, насколько неосновательно во многих руководствах правило для выделения алгебраической части интеграла от рациональной функции называется «правилом Эрмита».*

Остальные две упомянутые работы посвящены разысканию интегралов от алгебраических функций. В первой из них доказано, что если интеграл $\int R(x)\,dx$, где $R(x)$ — алгебраическая функция от x, не выражается через алгебраические функции, то этот интеграл равен линейной функции с постоянными коэффициентами от трансцендентных функций, имеющих алгебраические производные, и со свободным членом, равным алгебраической функции. Это же предложение может быть сформулировано иначе: самое общее алгебраическое соотношение, которое может существовать между трансцендентными функциями, производные которых равны алгебраическим функциям от аргумента x, может быть всегда приведено к линейному соотношению между ними

---

* Ch. Hermite. Sur l'integration des fonctions rationnelles. Ann. scientifique de l'ecole norm. sup. (2), 1, 1872, стр. 215—218. См. также: Ch. Hermite. Cours d'Analyse. 1873, стр. 265.

с постоянными коэффициентами и свободному члену, равному алгебраической функции.

Последняя из упомянутых работ посвящена той же задаче. В ней Остроградский ввел понятия «прямой» и «обратной» трансцендентных функций, понимая под прямой ту функцию, производная от которой есть алгебраическая функция аргумента x, а под обратной — ту, производная которой есть алгебраическая функция от самой функции. В работе доказано, что: 1) между прямыми и обратными функциями не может существовать алгебраических соотношений; 2) самое общее алгебраическое соотношение между прямыми трансцендентными функциями может быть приведено к линейной форме от этих функций, причем коэффициенты этой формы — постоянные числа, а свободный член — алгебраическая функция от x.

Из первого результата вытекает, между прочим, что интеграл от алгебраической функции не может содержать ни показательных, ни тригонометрических функций.

Заметку «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836 г.) Остроградский закончил словами: «Мы предпочли употребить геометрические рассуждения, ибо мы предназначаем это рассуждение для лиц, мало искушенных в математическом анализе». Эти слова достаточно убедительно говорят, что сама указанная работа появилась в связи с желанием Остроградского дать лицам, изучающим математический анализ, простое, наглядное и одновременно строгое изложение важного раздела интегрального исчисления.

К этому времени он обладал уже солидным педагогическим опытом и преподавал математические предметы в трех высших учебных заведениях: Морском кадетском корпусе, Институте корпуса инженеров путей сообщения и Главном педагогическом институте. К тому же сам Остроградский во вводных предложениях к работе подчеркивает методический характер и назначение работы: «Принцип этой замены известен. Он дан Эйлером и Лагранжем; но, как мне кажется, эти знаменитые геометры не изложили его со всей желательной ясностью».

Остроградский сначала показывает, что буквальное понимание правила, данного Эйлером в 1769 г.* для случая замены переменных в двухкратных интегралах и Лагранжем в 1773 г.** — для случая трехкратных интегралов, может привести к ошибочным заключениям. Далее он излагает собственное оригинальное изложение вопроса о замене переменных в двойном и тройном интегралах, которое почти дословно повторяется в наше время во всех учебниках математического анализа.

После изложения правила замены переменных в трехкратных интегралах Остроградский добавил: «Только что указанное преобразование может быть легко... распространено на любое число интегралов». Заявить это он имел тем большее право, что за два года перед этим, в «Мемуаре об исчислении вариаций кратных интегралов» (1834 г.), он пришел к формуле

$$dXdYdZ\ldots = S\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\ldots\right)dxdydz\ldots,$$

в которой символ S, введенный Коши, обозначает как раз функциональный определитель, называемый теперь якобианом. Таким образом, общая формула преобразования переменных в кратных интегралах произвольной кратности была дана Остроградским еще в 1834 г. Этот же общий вывод имеется и в рукописях Остроградского, хранящихся в Киеве (лл. 46—48).

Мы должны заметить, что в работе 1834 г. Остроградский еще находился под влиянием рассуждений Лагранжа и считал, что при преобразовании переменных в кратных интегралах величина элементарного объема сохраняется. В мемуаре 1836 г. этот момент был им подвергнут критике. Заслуживает также упоминания и то обстоятельство, что уже в работе 1834 г. Остроградский доводит до полной ясности правило для установления пределов интегрирования по каждому из переменных.

---

* De formulis integralis duplicatis. Novi commentarii Acad. sc. Petropolitanae, v. XIV, part. I.

** Sur l'attraction des sphéroides elliptiques. Nouveaux mémoires de l'Acad. royale des sc. de Berlin, 1773.

Почти одновременно с Остроградским * вопросом преобразования переменных в кратных интегралах занимались К. Якоби и Каталан. Первое сообщение Якоби датировано 23 августа 1833 г.** В нем приведена без доказательства формула

$$d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2} = \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial v_{n-2}}\right) dv_1 dv_2 \ldots dv_{n-2},$$

с точностью до обозначений совпадающая с ранее приведенной формулой Остроградского.

Подробное изложение вопроса встречается у Якоби в работе 1841 г. *** (этому посвящен ее последний параграф). Нужно, однако, отметить, что Якоби и в этой окончательной статье изложил вопрос формально; он не остановился ни на задаче установления пределов интегрирования, ни на вопросе выбора знака определителя, ни на вопросе выяснения геометрической сути дела.

В том же 1841 г. была напечатана статья Каталана.**** В ней также осталась в тени геометрическая картина, которую так исчерпывающе вскрыл Остроградский.

Работа Остроградского «Об определенных квадратурах» (1839 г.) посвящена выводу остаточного члена в формуле Эйлера, связывающей определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с суммой $\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$, где $h = \frac{b-a}{n}$. Остроградский считал, что до него этим вопросом занимался лишь Пуассон, давший формулу остаточного члена, но в сложной форме. В выводе Остроградского используется тот

* «Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов» был доложен Остроградским 24 января 1834 г. и напечатан в 1835 г.

** De binis quibuslibet functionibus homogeneis etc. Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. 22, 1833.

*** De determinantibus functionalibus. Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. 22, 1841.

**** Sur la transformation des variables dans les intégrales multiples. Mémoires couronnées de l'Acad. royale des sc. et des Bellessiettres de Bruxelles, v. XIV, part. 2, 1841.

прием, который употребляется и теперь; окончательная форма остаточного члена тоже получена им почти в современном нам виде. Однако в этом Остроградский имел предшественника — К. Якоби (1834 г.).

В небольшой «Заметке о методе последовательных приближений» (1835 г.) Остроградский дал интересное улучшение метода Ньютона для приближенного решения системы дифференциальных уравнений. Он отметил, что метод Ньютона может дать ошибочные выводы, поскольку может привести к так называемым вековым членам, т. е. членам, содержащим аргумент вне знака синуса и косинуса. Остроградский указал прием, который дал возможность устранить появление такого рода членов. В качестве примера он рассмотрел уравнение.

$$\ddot{y}+y=\alpha y^3, \qquad y(0)=1, \quad \dot{y}(0)=0.$$

Обычный прием привел Остроградского к решению

$$y=\cos t+\frac{\alpha}{32}(12t\sin t+\cos t-\cos 3t),$$

написанному с точностью до величин порядка α. Своим же методом Остроградский получил с той же степенью точности следующее приближение:

$$y=\cos t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}+\frac{\alpha}{32}\left(\cos t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}-\cos 3t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}\right),$$

которое уже не содержало вековых членов.

Позднее было обнаружено, что уравнение, рассмотренное Остроградским, имеет отношение к исследованию качки корабля. Метод Остроградского послужил началом теории нелинейных колебаний.

В небольшой работе «Заметка о линейных дифференциальных уравнениях» (1838 г.) Остроградский нашел замечательную формулу, излагаемую теперь в качестве одного из основных результатов теории линейных дифференциальных уравнений под названием формулы Лиувилля. Укоренившееся наименование не имеет

однако, серьезных оснований, так как в работе Лиувилля * такой формулы нет; ее только можно вывести из других результатов этой заметки. В то же время мы должны отметить, что для уравнения второго порядка Абель ** до Остроградского вывел формулу

$$y_2y_1' - y_1y_2' = e^{-\int P(x)dx},$$

дающую ту же закономерность, что и формула Остроградского.

Статьи «Заметка о разных вопросах математического анализа» (1837 г.), «Заметка о частном вопросе относительных максимумов» (1841 г.), «Заметка о равных множителях целых полиномов» (1856 г.) вызваны, на наш взгляд, педагогическими интересами Остроградского. Так, в первой из названных статей он высказывает свои взгляды относительно содержания математического анализа, указывает на распространенную ошибку при вычислении вариаций функций многих переменных и показывает, как можно вывести свойства показательной функции, рассматривая ее как функцию, обратную для $\int_1^x \frac{dz}{z}$. Во второй статье он исправляет ошибку Навье, допущенную последним при определении максимума функции от двух переменных, и указывает общее правило для решения подобных задач. В третьей статье им предложен удачный метод выделения кратных корней многочленов.

Мы не будем касаться статей: «Мемуар о производящих функциях» (1836 г.), «Извлечение из мемуара о вероятностях ошибок трибуналов» (1834 г), «Заметка об эмеритальной кассе» (1858 г.), «О вероятности гипотез после исхода испытаний» (1859 г.), «Об одном вопросе о вероятностях» (1846 г.), так как в них Остроградскому не удалось дать значительных новых концепций.

---

* Liouville. Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires. Journ. de Math. pures et appliquées, (1), 3, 1838, стр. 342—349.

** N. Abel. Sur quelques intégrales définies. Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. 2, 1827.

Полученные частные результаты лишь несколько улучшали или исправляли уже известные факты. Последняя работа представляет наибольший интерес, так как о решенной в ней задаче автор заявил, что «решение предложенного нами вопроса может служить поставщикам для сокращения, приблизительно до двадцатой части, механической и чаще всего очень утомительной работы по проверке весьма большого числа мешков с мукой или кусков сукна».

Среди рукописей Остроградского, хранящихся в Государственной публичной библиотеке УССР в Киеве, находятся записи (лл. 170, 173—174, 185—189, 326—327, 1057—1058) нового интересного алгоритма для представления иррациональных чисел в виде знакопеременных рядов особого вида. Этот алгоритм был восстановлен профессором Е. Я. Ремезом и недавно изучен им в специальной работе.*

На л. 326 рукописи имеется такая запись: «Пусть будет a целая часть несоизмеримого количества ω. и α остаток <1. Сравним α с единицей; допустим, что α содержится в ней p раз и что получится остаток β, так что $1=p\alpha+\beta$; сравним β с единицей, и пусть будет $1=q\beta+\gamma$, $1=r\gamma+\delta$ и т. д., — количества α, β, γ, δ все более малые; мы будем иметь $\omega=a+\alpha$; но $\alpha=\frac{1-\beta}{p}$, следовательно, $\omega=a+\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}$; но $\beta=\frac{1-\gamma}{q}$, следовательно, $\omega=$ $=a+\frac{1}{p}-\frac{1}{pq}+\frac{\gamma}{pq}$; но $\gamma=\frac{1-\delta}{r}$, значит $\omega=a+\frac{1}{p}-\frac{1}{pq}+$ $+\frac{1}{pqr}-\frac{\delta}{pqr}$».

Несколько дальше Остроградский ввел более удобные обозначения и записал равенство

$$\omega=a+\frac{1}{p}-\frac{1}{pp_1}+\frac{1}{pp_1p_2}-\frac{1}{pp_1p_2p_3}\pm\ldots+\frac{(-1)^n}{pp_1p_2\ldots p_n}+\frac{(-1)^{n+1}\alpha_{n+1}}{pp_1p_2\ldots p_n},$$

* Е. Я. Ремез. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел. Успехи матем. наук, т. 6, вып. 6, 1951, стр. 33—42.

а также записал для величины α_{n+1} двусторонние неравенства

$$\frac{1}{p_{n+1}+1} < \alpha_{n+1} < \frac{1}{p_{n+1}}.$$

На лл. 185—189 содержится вычисление числа $\lg 17$ посредством описанного алгоритма. Для этого примера Остроградский нашел (в только что указанных обозначениях)

$$p = 4, \quad p_1 = 12, \quad p_2 = 16, \quad p_3 = 65, \quad p_4 = 98,$$

$$\alpha_5 = \frac{0}{98} \qquad (0 < 0 < 1), \quad \lg 17 = 1.2304489224$$

с положительной погрешностью, меньшей чем $\frac{1}{4} \cdot 10^{-8}$.

На лл. 1057—1058 излагается еще один способ представления иррациональных чисел знакопеременным рядом. Изложение ведется на примере представления $\sqrt{2}$. Читателя, желающего познакомиться с этим алгоритмом, мы направляем к упомянутой работе Е. Я. Ремеза.

В заключение можно с полным основанием утверждать, что Остроградский сумел внести выдающийся вклад и в область математического анализа. Его результаты имеют не только историческое значение: они вошли в современную математику в качестве существенной и неотъемлемой ее части и представляют собой то необходимое орудие, без которого математика уже не может обойтись при изучении явлений природы.

* *
*

Замечательной чертой передовых представителей русского естествознания вообще и математиков в частности являлось то, что они были не только новаторами в науке, смелыми мыслителями, но и учителями в широком смысле этого слова; они не замыкались в круг своих научных интересов, а значительную часть времени и сил отдавали делу просвещения.

Прогрессивное значение педагогической деятельности русских математиков заключается не только в их личном преподавании,

а в том, что они принимали активное участие в общем педагогическом движении и оказали существенное влияние на развитие математического просвещения и культуры в России.

Педагогическая деятельность М. В. Остроградского в этом отношении особенно характерна. Он начал преподавать с 1 октября 1828 г. в офицерских классах Морского кадетского корпуса.* В 1830 г. Остроградский был зачислен профессором Института корпуса путей сообщения — лучшего в то время технического учебного заведения страны, а через два года он был приглашен в качестве профессора в Главный педагогический институт, в стенах которого обучались Д. И. Менделеев, Н. А. Добролюбов, И. А. Вышнеградский и др.

С 1840 г. к этой уже весьма напряженной педагогической деятельности прибавилось преподавание в Главном инженерном училище (впоследствии Николаевской инженерной академии), а через год — в Главном артиллерийском училище (будущей Михайловской артиллерийской академии). Со всеми этими учебными заведениями Остроградский был тесно связан до конца своей жизни.

В течение более чем тридцатилетней преподавательской деятельности он прочел несколько курсов по высшей математике и механике (дифференциальная геометрия, алгебра, аналитическая и небесная механика, теория вероятностей и баллистика).

Лекции Остроградского отличались богатым содержанием, целостностью и изяществом изложения. Он читал живо, увлекательно, стараясь раскрыть перед слушателями идейное богатство науки, анализируя возможные методы исследования различных научных проблем. Поэтому его лекции пользовались у слушателей большим успехом, а сам он завоевал славу блестящего лектора.

Знаменитый русский механик Н. П. Петров, ученик Остроградского по Николаевской инженерной академии, писал о нем: «Он был выдающийся ученый и вместе с тем обладал удивительным даром мастерского изложения в самой увлекательной и живой форме не

---

* Впоследствии реорганизованных в Морскую академию. Преемниками его по заведованию кафедрой математики в Морской академии были: В. Я. Буняковский, А. Н. Коркин и А. Н. Крылов.

только отвлеченных, но, казалось бы, даже сухих математических понятий. Это мастерство и помогало ему подготовлять многих отличных преподавателей математики».*

Известный русский инженер В. А. Панаев вспоминал: «Все серьезно занимавшиеся молодые люди ждали всегда лекции Остроградского с лихорадочным нетерпением, как манны небесной. Слушать его лекции было истинным наслаждением, точно он читал нам высоко поэтическое произведение».**

Каждую свою лекцию Остроградский начинал с краткого обзора изложенного в предыдущих лекциях. Прежде чем приступить к записи вывода того или иного положения, он указывал слушателям ход рассуждений и метод доказательства. Весьма часто он оживлял свои лекции историческими экскурсами, рассказами из биографий знаменитых людей.

Остроградский стремился читать свои лекции в наиболее доступной форме, сохраняя при этом общность и строгость рассуждений. Он чувствовал аудиторию и всеми мерами старался довести до сознания каждого слушателя свои мысли. Вот что, например, писал один из его учеников: «Остроградский читал так, что увлекал всех; самые сложные вещи он излагал с такой простотой и ясностью, что не понять было невозможно. Но, заметив, что и тут еще некоторые как будто путались, он живо стирал написанное и приводил другой способ доказательства, нисколько не задумываясь».***

Остроградский как экзаменатор оставался верен своим педагогическим принципам, борясь с формализмом, с «зубрежкой», требуя от экзаменующихся твердого, ясного понимания сути вопроса, правильного логического мышления. Он легко прощал незнание на память формул и охотно поощрял высокими отметками тех, у кого выявлял математическое развитие, живую мысль и сознательное усвоение. Он неоднократно подчеркивал, что математику нельзя учить

---

* Вестн. Военно-инж. акад. им. В. В. Куйбышева, вып. 43, М., 1945, стр. 5.

** Русская старина, т. 80, 1893, октябрь и ноябрь, стр. 79.

*** М. Максимовский. Исторический очерк развития Главного инженерного училища. СПб., 1869, стр. 108.

формально, что эта наука требует развитого мышления, а не механического запоминания готовых рецептов.

В этой связи небезынтересно привести следующий рассказ Остроградского на одной из лекций, записанный его слушателями: «Еду я раз, — говорил он по поводу ссылки одного из учеников на какой-то авторитет, — по Полтавской губернии и вижу: землемер работает. Я подошел к нему: Что вы делаете? — Поле вымеряю. — Каким же это способом? — А видите: оно треугольное (а точно, это был прямоугольный треугольник), так я вымерю саженью ту и другую сторону, перемножу, разделю на 4800 и выйдет, сколько десятин в поле. — Это очень любопытно, а может быть, и совершенно верно, но скажите, отчего же это так? — Тот думал, думал. . .: Так губернский землемер делает».*

Едва ли после такого каламбура у кого-нибудь из слушателей вновь возникало желание заменить самостоятельную мысль ссылкой на авторитет или скрыть отсутствие собственных суждений.

Отличительными особенностями Остроградского как лектора являлись склонность к математической строгости и широким обобщениям, умение ясно и наглядно представить слушателям сущность излагаемого вопроса, стремление к развитию у слушателей математического мышления и самостоятельного творчества.

Непосредственная преподавательская деятельность Остроградского, таким образом, сильно способствовала математическому образованию юношества; его манера чтения лекций и методические приемы живо воспринимались учениками, многие из которых стали впоследствии профессорами и преподавателями высших и средних школ России.

* *
*

Педагогическая деятельность Остроградского не ограничивалась только преподаванием. Около двадцати лет он руководил преподаванием математики в военно-учебных заведениях России, занимая

---

* А. Платов, Л. Кирпичев. Исторический очерк образования и развития Михайловского артиллерийского училища. СПб., 1870, стр. 151.

должность главного наблюдателя, и почти столько же лет являлся членом учебного комитета и главным наблюдателем при Главном управлении путей сообщения. За это время Остроградский провел огромную организационную и методическую работу, направленную на повышение общего уровня преподавания математики. Как главный наблюдатель он руководил составлением программ, посещал занятия в столичных военно-учебных заведениях, периодически выезжал в провинцию с инспекционными целями, возглавлял методические совещания преподавателей математики, присутствовал на выпускных экзаменах.

Вместе с тем он следил за научной и методической подготовленностью преподавателей-математиков, руководил составлением учебных руководств и пособий по всем математическим дисциплинам и лично сам рецензировал математические сочинения, предназначенные для учащихся.

Несмотря на то, что круг обязанностей главного наблюдателя был чрезвычайно большим, Остроградский до конца своей жизни успешно справлялся с ними.

Особенно тщательно Остроградский занимался подбором и воспитанием преподавательского состава. Каждый преподаватель математики любой военной школы России подвергался испытанию у него. Эти испытания состояли из экзаменов по специальным дисциплинам и так называемых пробных лекций, темы которых составлялись неизменно самим Остроградским. В комиссии под председательством Остроградского держали испытания многие молодые люди, получившие впоследствии известность как ученые и методисты: А. Н. Коркин, И. А. Вышнеградский, В. А. Евтушевский, Ф. И. Симашко, А. И. Гольденберг, В. П. Воленс и др.

Личное общение Остроградского с широкими кругами преподавателей математики не только питало его творческую методическую мысль, но и самым благоприятным образом сказалось на постановке математического образования в военно-учебных заведениях.

Под руководством Остроградского и при его непосредственном участии была создана серия учебников по математике, механике и математической географии, которые оставили глубокий след

в истории развития учебных руководств в России. Так, были изданы или переизданы в переработанном виде: «Арифметика» Буняковского, «Руководство начальной геометрии в трех частях» самого Остроградского, «Первые начала приложения алгебры к геометрии» Сухонина, «Аналитическая геометрия» Сомова, «Математическая география» Ястржембского, «Элементарная механика» Вышнеградского, руководства по дифференциальному и интегральному исчислению Беренса и др.

Остроградский был вдохновителем и организатором создания этого комплекса учебных руководств. Он подбирал авторов, руководил их работой, читал и исправлял рукописи. Каждая рукопись затем передавалась на рецензию известным математикам — Буняковскому, Сомову, Перевощикову и др. Особая математическая комиссия под председательством Остроградского выносила окончательное суждение о научных и педагогических достоинствах рукописей.

Кроме того, под руководством Остроградского были составлены конспекты по всем разделам математики и механики, представлявшие собой подробные и чрезвычайно ценные методические руководства для преподавателей. Так, были написаны и изданы «Программа и конспект по арифметике» и «Программа и конспект по геометрии» Буняковского, «Программа и конспект по тригонометрии» самого Остроградского. Мы знаем также, что Остроградский написал методическое руководство по алгебре, однако последнее не удалось обнаружить.

Обычно в историко-педагогической литературе, посвященной Остроградскому, отмечается, что он был автором двух учебных руководств для средней школы («Руководство начальной геометрии» и «Программа и конспект по тригонометрии») и одного руководства для высшей школы («Лекции по алгебраическому и трансцендентному анализу»). В действительности же Остроградский сделал значительно больше. Так, он написал в 1841 г. учебник по дифференциальному исчислению для Морского кадетского корпуса, а в 1860 г. совместно с А. Блумом издал конспекты по начальной арифметике и начальной геометрии. Кроме того, известно, что Остроградский составлял

учебник по элементарной алгебре и по дифференциальному исчислению с элементами высшей алгебры.

Перейдем к краткому анализу этих учебных пособий. В 1855 г. Остроградский издал «Руководство начальной геометрии» — курс второго общего класса кадетских корпусов, в 1857 г. — курс третьего общего класса и в 1860 г. — курс пятого общего класса. Этот учебник совершенно не походил на другие, вышедшие ранее, ни по содержанию, ни по размещению материала, ни по методу доказательств геометрических предложений.

В «Предуведомлении» к «Руководству» Остроградский сам писал об этом: «Сочинение это отличается от других руководств по той же науке: развитием основных начал, порядком теорем и способом доказательств. Автор имеет в виду приблизить изложение истин начальной геометрии к способам, употребляемым в других частях математики, а потому разместил предложения в порядке, который показался ему наиболее соответствующим предположенной цели. Однако ж он не посмел, в первой попытке, войти в решительное состязание с изложением, которому Евклид представил образец и которое употребляется более двадцати веков. Но если первый опыт будет одобрен, то в последующих изданиях автор поступит с большей решительностью и введет в начало науки все изменения сейчас указанной мысли».*

«Руководство» Остроградского являлось в то время наиболее полным и подробным учебником геометрии. Характерная черта его — общность изложения геометрического материала. Значительное число самостоятельных геометрических предложений, выясняющих свойства геометрических образов того или иного вида, получаются у Остроградского как частный случай из свойств более общих геометрических образов. Так, например, Остроградский прежде всего исследует общие свойства выпуклых многоугольников, а затем уже выводит свойства частных видов треугольников, четырехугольников и др. Многие свойства окружности автор получает

* М. В. Остроградский. Руководство начальной геометрии. Курс 2-го общего класса. СПб., 1855, стр. 1.

как частный случай из общих свойств плоских кривых. Большой общностью отличаются также и определения. Доказательства теорем отличаются оригинальностью.

Остроградский более смело, чем другие авторы, прибегал к алгебре, к аналитическим выводам геометрических предложений. Больше того, он даже высказывался в пользу применения дифференциального исчисления к изложению элементарной геометрии. Так, он писал: «. . .исчисление это [дифференциальное исчисление,— *Авторы*] могло бы в геометрии заменить и упростить суждения, посредством которых Евклид распространяет предложения, доказанные для величин соизмеримых, на величины несоизмеримые. Но, конечно, найдут неуместным вводить дифференциальное исчисление в начальную геометрию».

Однако учебник Остроградского, несмотря на ряд достоинств, не нашел широкого распространения в школьной практике, ибо он оказался трудным для школьников. В нем много абстрактных суждений, полезных для преподавателей, но недоступных для детей школьного возраста.

Кроме того, и в научном отношении учебник небезупречен. Остроградский, как известно, не сумел оценить бессмертных творений Лобачевского и, будучи первоклассным аналитиком, не поднялся в области оснований геометрии над уровнем большинства математиков своего времени. Этим объясняется его неудачное изложение некоторых вопросов, связанных с теорией параллельных прямых.

Несмотря на это, «Руководство» Остроградского явилось ценным пособием для учителей и для авторов более поздних учебников по геометрии. Но этим не ограничивается его значение. Если Лобачевский разрушил представление о геометрии Евклида как единственно возможной, то Остроградский своим учебником нанес серьезный удар по педагогической традиции, основанной на строгом и слепом следовании евклидовым «Началам», вступив в «состязание с изложением, которому Евклид представил образец».*

---

* М. В. Остроградский. Руководство начальной геометрии, стр. 1.

Н. Г. Чернышевский восторженно отзывался об учебнике геометрии Остроградского. Он писал: «. . .излишне и рекомендовать его книгу величайшему вниманию всех преподавателей математики — все это совершенно излишне потому, что на ней выставлено имя г. Остроградского».*

В 1851 г. вышла книга Остроградского «Программа и конспект тригонометрии». Эта книга предназначалась для преподавателей в качестве методического руководства. Здесь автор дал совершенно новое построение курса тригонометрии для военно-учебных заведений. Основная идея Остроградского сводилась кратко к следующему. Тригонометрия подчинена единственной задаче — решению треугольников. Прямоугольные треугольники решаются непосредственно с помощью особо построенных им таблиц и самых простых правил пропорции. Для вывода всех необходимых соотношений при решении косоугольных треугольников Остроградский предложил весьма остроумный прием, заключавшийся в рассмотрении данного и вспомогательных треугольников, те или иные стороны которых, в зависимости от задачи, равны или сумме или разности сторон данного треугольника.

Пользуясь одной исходной фигурой, состоящей из данного косоугольного треугольника и двух вспомогательных линий, Остроградский легко получил теоремы синусов, тангенсов, так называемые формулы Мольвейде, формулы для выражения тангенсов половинных углов треугольника через его стороны и т. п. Другие соотношения между тригонометрическими функциями — формулы сложения, вычитания, формулы преобразования сумм и разностей тригонометрических функций к виду, удобному для логарифмирования, и т. д. — вытекали отсюда почти непосредственно.

Здесь, как и везде, Остроградский пошел самостоятельным путем. План построения курса, структура его и, наконец, выводы самих формул принадлежат автору. Остроградский, по-видимому,

---

* Н. Г. Чернышевский, Полн. собр. соч., М., 1949, стр. 739—741.

придавал большое значение этой работе, так как поместил основные результаты ее в «Мемуарах Академии наук».*

Общеизвестны «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа», читанные М. В. Остроградским в 1836 г. в Морском кадетском корпусе,** которые во многом определили содержание последующих руководств и учебных курсов, а отчасти и научных исследований по алгебре и теории чисел. Здесь Остроградский изложил курс высшей алгебры на уровне современного ему состояния этой науки, включив и доказательство невозможности общего решения уравнений выше четвертой степени в радикалах, и способ Гаусса для решения двухчленных уравнений.

Небезынтересно привести выдержки из письма одного из слушателей Остроградского к своему московскому другу.*** Это письмо ярко характеризует отношение передовой интеллигенции к публичным лекциям Остроградского, вызывавшим глубокий интерес, и свидетельствует о том, что ими гордились как выдающимся событием в русской научной жизни.

«Душевно радуюсь, — писал автор письма, — что имею случай Вам, любителю всего полезного, сообщить очень приятную новость, которую, впрочем, Вы, верно, знаете из газет, но без подробностей.

«Вот уже двенадцатый раз имели мы удовольствие слушать лекции русского геометра, которого лет семь тому назад с таким удовольствием слушали сами французы в самом Париже, столице геометров. У нас теперь свой родной геометр, которым можно гордиться, и еще лучше — у него учиться, которого каждый мемуар — их уже очень много — есть непременно какое-нибудь новое открытие, новый подарок ученой Европе. . . На лекцию собираются: инженеров путей сообщения 15, морских офицеров 22, корабель-

---

* Note sur le traité de trigonométrie à l'usage des écoles militaires. Bull. phys.-math., 1852, 10, № 1, стр. 11—13.

** Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа, читанные в Морском кадетском корпусе академиком Остроградским. Составлены Корп. кораб. инж. кап. С. Бурачком и лейтенантом С. Зеленым. СПб., 1837.

*** Письмо адресовано к Е. Н. Коршу — журналисту и публицисту, участнику кружка Герцена, Белинского и Грановского.

ных офицеров 12, генерального штаба 1, полевых инженеров 3, разных гг. ученых 8, всего 61.

«Я вместе с Вами без ума от восторга: 53 слушателя, все в эполетах, 61 всех слушателей математики! Представьте себе, сам Коши, предводитель парижских аналистов, не всегда насчитывал их у себя до 20; в Париже, где и барыни не пугаются анализа, где анализ тоже в числе модных „головных" уборов. Между постоянными слушателями мы заметили троих наших академиков, сочленов г. Остроградского, известнейших всей ученой Европе: В. Я. Буняковского, Э. Х. Ленца, М. В. Тарханова. Этого не помнят ни в Париже, ни в Берлине. Кроме их, мы заметили еще многих заслуженных штаб-офицеров. Как же не радоваться, что у нас есть кому и есть кого слушать!».*

Как свидетельствуют Бурачек и Зеленый, публичные лекции Остроградского были задуманы очень широко и рассчитаны на несколько лет. «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» являлись лишь первой частью курса, за которой должны были последовать части, посвященные дифференциальному и интегральному исчислениям. Менее известно, что лекции по трансцендентному анализу Остроградский действительно продолжил (правда, четыре года спустя), причем две из них были напечатаны.**

Эти записи мало известны, а потому мы подвергнем их краткому обозрению.

В первой лекции Остроградский вводит понятие определенного интеграла, исходя из обобщения среднего арифметического n чисел для непрерывной функции. Деля отрезок $[a, b]$ на равные

* Математические лекции г. академика Остроградского. Письмо Б. . .с к Е. Коршу от 4 XII 1836. СПб., 1837.

** Извлечение из публичных лекций трансцендентного анализа, читанных акад. М. В. Остроградским, записанных его ближайшими учениками по Институту корпуса инженеров путей сообщения П. И. Собко и М. А. Агамоновым. Журн. Мин. путей сообщ., т. 2, 1841, стр. 31—42, 92—103. П. И. Собко — впоследствии профессор прикладной механики и строительного искусства. М. А. Агамонов — подполковник Института корпуса инженеров путей сообщения.

части ε с помощью чисел, образующих арифметическую прогрессию, он рассматривает среднее арифметическое значений функции $f(x)$ в точках деления. Предел этих средних при числе делений, стремящемся к бесконечности, Остроградский называет средним арифметическим функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а произведение среднего функции на длину отрезка $|ab|$ называет определенным интегралом. Из этого определения он затем легко получает все основные свойства определенного интеграла.

Во второй лекции Остроградский выводит формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Кроме публичных лекций по алгебраическому и трансцендентному анализу и по небесной механике,* Остроградский в 1859/60 г. читал общие лекции по дифференциальному исчислению и по теории вероятностей в помещении Михайловской артиллерийской академии.** Лекции по дифференциальному исчислению, как свидетельствуют историки Михайловского артиллерийского училища А. Платов и Л. Кирпичев, были записаны и полностью изданы в литографированном виде прапорщиком И. И. Борткевичем, но сейчас они утеряны.

Те же Платов и Кирпичев писали о первой лекции Остроградского по теории вероятностей: «На первую лекцию знаменитого профессора собрались сотни слушателей. Остроградский с необыкновенным изяществом и удивительной простотой, почти не прибегая к мелу и губке, изложил происхождение теории вероятностей и основные ее начала. Все были в восторге. Явилось сразу несколько желающих записывать и издавать лекции».***

---

* Отметим, что публичные лекции Остроградского положили начало целому ряду таких же публичных курсов в других университетских городах России. В Петербурге Гесс читал химию, Нечаев — физику, Ястржембский — механику, в Москве Перевощиков — астрономию. Институт корпуса инженеров путей сообщения организовал публичные «Чтения об усовершенствованиях в инженерных науках». В «Чтениях» приняли участие: Буняковский, Остроградский, Базен, Ляме, Купфер, Гесс и др. Эти лекции сыграли немалую роль в деле развития научных знаний в России.

** Архив АН СССР, разр. V, оп. 1-о, № 11.

*** А. Платов, Л. Кирпичев. Исторический очерк..., стр. 265.

В 1847 г. Остроградский читал публичные лекции в помещении Академии наук; однако не удалось установить, какому разделу математических наук они были посвящены.

В 1937 г. А. Н. Крыловым были случайно обнаружены сделанные Н. С. Будаевым записи прекрасных лекций по механике и аналитической геометрии, читанных Остроградским в 1851—1852 гг.*

Основная особенность лекций по механике (как 1837 г., так и 1852 г.) — это стремление автора к общности и целостности. Основные положения механики Остроградский выводит из единого начала возможных перемещений. Теоретические изыскания он ведет собственными методами, дополняя и углубляя «Аналитическую механику» Лагранжа, а в некоторых случаях и исправляя ее.**

Лекции Остроградского по аналитической геометрии, судя по записям Будаева, были посвящены, по сути дела, не аналитической геометрии в обычном смысле, а приложению анализа к геометрии. Записи Будаева начинаются с учения о касательных и кривизне. Сразу исследуется общий случай кривых в пространстве, а плоские кривые рассматриваются затем как частный случай. Далее идет исследование кривизны поверхностей и учение о линиях кривизны в прямоугольных и криволинейных координатах; с помощью вариационного исчисления строится учение о геодезических линиях.

Лекции по аналитической геометрии отличаются большими методическими достоинствами; в них приводится большое количество примеров.

Руководства: «Начальная арифметика» и «Начальная геометрия», составленные Остроградским совместно с А. Блумом, вошли в серию «Политехнические таблицы — собрание, представляющее сокращенное изложение наук математических, физических и их применений». Издание это было предпринято авторами с целью распространения физико-математических и технических знаний среди широких кругов русской интеллигенции. «Таблицы», по замыслу

* Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 354, стр. 18—30.

** Собр. соч. акад. М. В. Остроградского. Л., 1946 (см. замечания ко второй части первого тома).

их редакторов и издателей, должны были представлять своеобразную энциклопедию политехнических наук.

К составлению таблиц были привлечены крупные ученые различных специальностей, и таблицы стали выходить в 1860 г. на трех языках. К сожалению, Остроградский не успел завершить этот исключительно важный труд: вышло всего 11 таблиц, а предполагалось выпустить 380.

Таким образом, Остроградский сыграл в 30—50-е годы XIX в. исключительно крупную роль в создании отечественной учебной литературы по математическим наукам — от учебников по элементарной математике до оригинальных руководств по высшей алгебре и аналитической механике. Многие из этих сочинений написаны были лично им или записаны по его лекциям, другие были составлены — под его наблюдением и по его инициативе — рядом учеников знаменитого математика. Эта учебная литература оказала существенное влияние на развитие русского математического просвещения.

* *
*

Руководящими дидактическими принципами Остроградского в области преподавания математики было стремление к развитию у учащихся строгого математического мышления, самостоятельности, навыков и умения практически применять теоретические знания. Эти принципы сказались прежде всего на характере программ по математике и механике, составляемых и неоднократно пересматриваемых им как главным наблюдателем.

В отличие от предыдущих программ, в алгебре обращалось большое внимание на обоснование действий, на составление и изучение графиков. Из геометрии были удалены непринципиальные пункты (упражнения по топографии и др.), усилены разделы, имеющие значение для более строгого изложения систематического курса геометрии, а в арифметике более глубоко изложены теоретические основы этой науки.

Остроградский не только развивал идею о необходимости введения элементов высшей математики в курс средней школы, но и

добился осуществления ее: в 1850 г. в программы всех четвертых общих классов кадетских корпусов были включены начала высшей математики. Мы видели выше, что Остроградский высказывался в пользу введения элементов дифференциального исчисления в курс элементарной геометрии. Он шел еще дальше и утверждал, что основные понятия высшей математики должны стать достоянием широких кругов грамотных людей.

В статье «Погрешности при вычислении процентов», написанной для широкого круга читателей, Остроградский писал: «Рассмотрим же, какими формулами дóлжно руководствоваться при вычислении сложных процентов. Вопрос этот можно решить на основании самых элементарных правил алгебры, но мы употребим дифференциальное исчисление, во-первых, для большей простоты, а во-вторых, чтобы оно мало-помалу распространялось на все классы читателей. Фраза „дифференциальное исчисление есть трансцендентный, или высший, анализ и доступный весьма немногим“, повторяемая со времени Лейбница, должна же, наконец, устареть! Что может быть проще дифференциального исчисления для читателей, хотя бы несколько знакомых с математическими науками!».*

С другой стороны, Остроградский подчеркивал необходимость приблизить изложение элементарной математики к методам высшей математики. К этому он стремился при составлении своих учебных руководств, эту же мысль высказывал на методических совещаниях преподавателей.

Остроградский, далее, настойчиво добивался, чтобы преподавание математики и механики в кадетских корпусах было увязано с физикой и естествознанием. По его инициативе созывались объединенные совещания математической и физической комиссий для совместного обсуждения программ.**

Таким образом, есть все основания заключить, что в таких основных вопросах, как развитие функционального мышления, установ-

* Сев обозрение, 1848, № 1. См. также: Журн. Мин. нар. просв., 1848, ч. 59, отд. VI, стр. 117.

** Главным наблюдателем за преподаванием физики в военно-учебных заведениях был акад. Э. Х. Ленц.

вление связи математики с вопросами физики и естествознания, введение элементов дифференциального исчисления в курс средней школы, Остроградский еще за 50 лет до Клейна высказывал и частично осуществил идеи, которые затем легли в основу известного международного движения за реформу преподавания математики.

* *
*

Педагогические интересы Остроградского не ограничивались вопросами частной методики математики. Его глубоко интересовали и общие проблемы воспитания и образования.

Совместно с А. Блумом* Остроградский написал брошюру «Размышления о преподавании».** Это сочинение представляло собой не плод абстрактных размышлений кабинетных ученых, а боевое выступление страстных борцов за улучшение постановки школьного образования в России.

Авторы осудили методы преподавания в современной им школе. «Обучение, — утверждали они, — ведется слишком сухо, абстрактно, оторванно от потребностей жизни, без учета наклонностей и интересов детей. . . Кто из нас не видел, что из 50 соучеников по крайней мере 40 отвращены и обескуражены навсегда абстрактными идеями, которые нам вначале преподносили, прежде чем сделать их понятными с помощью примеров, взятых из практической жизни. Действительно, на уроках арифметики, алгебры, геометрии ничто не свидетельствовало о необходимости их изучения для практической жизни. Ничего не было рассказано об истории наук. Глубокие теории, сухие, непонятные определения были изложены, повторены и, осмелимся сказать, пережеваны, не давая никакого другого ре-

---

* И. А. Блум (1812—1877) — французский математик, автор ряда учебных руководств, участник революционных событий 1848 г.

** Considérations sur l'enseignement par Ostrogradsky, conSeiller privé, membre de l'Academie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, membre correspondant de l'Institut de France etc. et Auguste Blum, ancien éleve de l'Ecole polytechnique de France, Ingénieur, Professeur de mathématique et de construction, ets. St.-Pétersbourg—Paris, 1860.

зультата, чем образование небольшого количества учеников. Кажется, что жрецы древнего Египта еще руководят тайнами наук».*

Остроградский и Блум были убеждены в необходимости усовершенствования методов обучения. Изменить всю систему начального обучения, сделать его, не упрощая науку, интересным, доступным и увлекательным — такова была, по их мнению, важная и неотложная задача, стоявшая перед русским обществом. Они писали, что «пришел момент вспомнить об этой громадной проблеме — проблеме образования, избавить его от первоначальных трудностей, сделать его более простым, ясным, блестящим. . . Заинтересовать ум ребенка — вот что является одним из главных пунктов нашей доктрины, и мы не пренебрегаем ничем, чтобы привить ученику вкус — мы бы сказали даже страсть — к учебе».**

Что же предлагали Остроградский и Блум для этого? Суть их предложений в основном сводилась к тому, что обучение, особенно на первых его ступенях, должно быть максимально активным, творческим и наглядным. Первоначальные понятия о буквах, о счете, о геометрических фигурах, о механических и физических свойствах окружающих предметов и т. п. ребенок должен почерпнуть не из слов учителя, не из книги, а в процессе самостоятельного труда в мастерской, под руководством учителя. Ребенка, по замыслу Остроградского и Блума, начинают обучать с шести лет. Бóльшую часть учебного времени он проводит в мастерской, созданной при каждой школе. Занимаясь там лепкой, вырезыванием из картона и дерева букв, цифр, геометрических образов и т. д., он создает в своем воображении твердые представления о них.

В этих элементарных трудовых операциях состоит, по мнению авторов, первоначальная ступень обучения.

Содержанием следующей ступени обучения является отвлечение от этих конкретных овеществленных образов — изображение их на бумаге и рассмотрение их в различных сочетаниях. Ребенок за партой в классе рисует по моделям, созданным им самим, буквы,

---

* Там же, стр. 11—12.

** Там же, стр. 15—16.

цифры, геометрические фигуры, рассматривает и изучает их в различных комбинациях, учится письму, чтению, счету и т. д. На основе конкретных восприятий, полученных в процессе труда, ребенок ближе и глубже знакомится с первоначальными положениями геометрии, физики, космографии и др.

В результате первых двух ступеней обучения ребенок должен, как указывают Остроградский и Блум, получить определенную сумму конкретных восприятий, знаний и политехнических навыков. Он будет иметь представление о геометрических образах, об их измерении, сумеет вычертить геометрические фигуры с помощью линейки и циркуля, изобразить план местности и т. п. Он должен располагать некоторой суммой предварительных физических сведений, знать, что такое рычаг, лебедка, клин и т. п., иметь понятие о ковкости, вязкости и текучести материалов, об основных и простейших явлениях электричества, света, тепла и т. д.

Главное же, подчеркивают авторы, ребенок должен получить навыки наблюдения. «Дети не привыкли наблюдать, они смотрят не видя, слушают не воспринимая, говорят не зная. Скажем откровенно: зло воспитания детей состоит в том, что не вырабатывают их волю, их не приучают наблюдать, как не учат направлять свое внимание. Следует поэтому научить ребенка вниманию».*

Дальнейшая задача будет заключаться в систематизации полученных ребенком понятий, представлений и навыков, в углублении и закреплении их — это составит содержание следующей ступени обучения. И здесь, на этой ступени обучения, авторы предлагали широко прибегнуть к наглядности.

Будучи убежденными в необходимости немедленного осуществления реформы школы и придавая ей большое общественное значение, Остроградский и Блум заявляли о своей готовности отдаться целиком этому делу и призывали передовую интеллигенцию России последовать их примеру. «Мы готовы, — писали авторы, — отдать все наши заботы этой новой организации обучения. . . Мы хотим, чтобы активные деятели присоединились к нашим уси-

---

* Там же, стр. 21.

лиям и разделили с нами счастье делать полезное дело. Мы уверены, что наш призыв будет услышан. . . Люди науки, преданные родине, займутся с энтузиазмом жизненным вопросом обучения».*

Как свидетельствовали Остроградский и Блум, метод их был проверен на опыте в школьной практике и с успехом себя оправдал.

Остроградский и Блум высказывали в своей брошюре также ряд ценных мыслей по поводу отдельных педагогических вопросов. Весьма интересны рассуждения об учителе. Авторы так определяют роль учителя в деле воспитания и образования подрастающего поколения: «Хорошие учителя создают хороших учеников. . . Прежде всего, учитель должен любить свое дело. Каждый, как для личного счастья, так и для пользы других, должен иметь любовь к своему делу, но учитель больше, чем кто-либо другой, должен быть привязан к своей профессии; она должна быть целью его жизни». Нельзя требовать от учителя, говорят далее авторы, универсальных познаний во всех областях науки, но тот предмет, который непосредственно составляет содержание его преподавания, он должен знать в совершенстве. «Никто в мире не должен знать об этом больше, чем он [учитель, — *Авторы*], говорить об этом лучше него, спрашивать с большей заботой и писать с большей точностью, чем он!».**

Все это показывает, что Остроградский придерживался весьма передовых для своего времени педагогических взглядов. Его критика методов преподавания в современной ему школе, его высказывания о необходимости наглядного конкретного обучения перекликались со взглядами Н. А. Добролюбова, также обрушившегося на систему школьного образования за отсутствие конкретности в преподавании, за отвлеченность, сухость, мертвенность, формализм.

Ценные мысли Остроградского о методах обучения, о создании при школах мастерских и о политехническом воспитании сохранили свое значение и в наши дни.

---

* Там же, стр. 51, 55.

** Там же, стр. 50.

* *
*

Из сказанного ясно, как много энергии и времени Остроградский уделял руководству математическим образованием в военно-учебных заведениях и воспитанию научно-технических кадров для армии и флота. Эта работа поглощала его силы и заметно отвлекала от научного творчества. Остроградский не мог не понимать этого. Однако он не только не ослаблял своей деятельности в качестве главного наблюдателя, но, наоборот, со временем все больше и больше отдавался ей.

Спрашивается, что привлекало его к этой работе, что заставляло его отдавать драгоценное время и энергию в ущерб своему математическому творчеству? Ответ может быть только один: глубокие патриотические чувства, благородное стремление служить русской культуре. Остроградский всемерно стремился содействовать широкому развитию математической и общетехнической культуры в России. Должность главного наблюдателя предоставляла ему большие возможности для влияния на общий уровень математического преподавания в военной школе, а через нее и на все математическое образование в России.

Таким образом, Остроградский выступает перед нами не только как крупнейший математик своего времени, но и как замечательный деятель, отдавший много труда и творческой энергии делу отечественного просвещения вообще и математического в частности.

К сожалению, до настоящего времени наша педагогическая литература обходит почти полным молчанием прогрессивную роль Остроградского в деле создания русской методической школы в области преподавания математики. Его педагогическое наследие мало исследовано, а педагогические произведения до сих пор не напечатаны. Сочинение «Размышления о преподавании» не переведено на русский язык. Даже те методические идеи, которые были опубликованы в работах Остроградского на русском языке, давно уже стали библиографической редкостью и поэтому почти недоступны для изучения.

* *
*

Остроградский оказал неоценимую услугу русской науке тем, что воспитал целую плеяду талантливых учеников, ставших впоследствии выдающимися представителями русской технической мысли. Можно с уверенностью сказать, что значительная часть крупнейших инженеров (главным образом военных) второй половины XIX в. была воспитана Остроградским и находилась под его идейным влиянием.

Мы уже отмечали выше, что Остроградский в процессе преподавания выявлял и всячески поддерживал талантливых, одаренных слушателей. Он всеми мерами старался привлечь их после окончания в качестве репетиторов в высшие военные учебные заведения или в качестве преподавателей в столичные кадетские корпуса. Из этих молодых людей он обычно составлял кружки и тщательно руководил их научными занятиями.

Эта молодежь бывала частым гостем у него дома, где в непринужденных научных беседах проходили многие вечера. Редко кто уходил оттуда, не обогатившись новыми знаниями и мыслями. Остроградский, не скупясь, раскрывал перед молодыми учеными богатство своего идейного мира.

Можно было бы перечислить много десятков видных ученых, воспитанных Остроградским и выросших под его руководством. Мы назовем имена лишь некоторых выдающихся представителей русской науки, прямым учителем которых был Остроградский и которые составили ядро его научно-технической школы.

И. А. Вышнеградский — основоположник теории автоматического регулирования — окончил в 1851 г. физико-математический факультет Главного педагогического института. Остроградский быстро заметил выдающиеся способности молодого студента, и Вышнеградский сразу же был назначен преподавателем математики в кадетском корпусе, а затем в 1854 г. — ассистентом Остроградского в Михайловской артиллерийской академии. Все эти годы он усиленно занимался математикой под руководством Остроградского и в 1854 г. защитил в Петербургском университете диссертацию на степень магистра математических наук.

Будучи преподавателем Михайловской артиллерийской академии, Вышнеградский стал усиленно заниматься прикладными вопросами, связанными с артиллерийской техникой, и в дальнейшем все его творчество приобрело прикладное направление.

Блестящие дарования Н. П. Петрова, будущего основоположника гидродинамической теории смазки, встретили живую поддержку со стороны Остроградского, оставившего его по окончании Военно-инженерной академии при своей кафедре и внимательно руководившего его математическими занятиями.

Петров с особой теплотой и благодарностью вспоминал своего знаменитого учителя. «Теперь я часто вспоминаю, — писал он через 50 лет после смерти Остроградского, — те счастливые часы, когда благодаря его мастерскому изложению какая-то магическая сила неизгладимыми чертами вписывала в моем уме новые знания, всегда представляя и красоту и силу знания в таких формах, которые внушали нам веру в могущество знания. Как все могущественное обладает притягательной силой, так и наука действовала на нас притягательно, побуждая изучать ее глубже и служить ей, не ожидая другой награды, кроме сознания высокой чести быть ее слугой. Вот какие благие для меня последствия проистекли из того, что я имел счастье быть учеником Остроградского».*

Сын известного математика, Г. Е. Паукер ** после окончания в 1842 г. курса Главного инженерного училища был оставлен Остроградским в училище в качестве репетитора. О влиянии Остроградского на формирование его научного интереса Паукер вспоминал: «В это время при училище образовался кружок молодых товарищей-преподавателей, работавших соединенными силами и друг друга поддерживавших. Центром же кружка и председателем наших еженедельных общих обедов был. . . М. В. Остроградский, любивший в свободное время живую беседу молодежи. Как благотворно должна

---

* Цит. по кн.: Л. Гумилевский. Русские инженеры. М., 1947, стр. 190.

** Биография Г. Е. Паукера имеется в кн.: Г. Е. Паукер. Строительная механика. СПб., 1891.

была отражаться на нас эта близкая связь с таким первостепенным подвижником европейской науки!».*

В 1847 г. Паукер опубликовал в журнале Крелля первую свою работу: «Заметка, относящаяся к некоторым правилам для сходимости рядов». В дальнейшем Паукер стал заниматься прикладными вопросами и вскоре выдвинулся как один из крупнейших военно-инженерных деятелей России.

После блестящего окончания Института корпуса инженеров путей сообщения в 1840 г. П. И. Собко был репетитором на кафедре теоретической механики, а в последующие годы под руководством Остроградского изучал математические науки и одновременно специализировался в области строительного искусства.

Окончивший Институт корпуса инженеров путей сообщения в 1832 г. Н. Ф. Ястржембский был оставлен Остроградским репетитором при кафедре механики. Впоследствии длительное время он был профессором теоретической и прикладной механики в Институте инженеров путей сообщения, Институте гражданских инженеров и Технологическом институте.

Н. С. Будаев по окончании Главного педагогического института в 1853 г. был адъюнктом кафедры математики, а затем был привлечен Остроградским к преподаванию математики и механики в Константиновском училище и в Михайловской артиллерийской академии. С 1866 по 1899 г. он был также профессором Петербургского университета.

Из школы Остроградского вышли также В. Н. Шкляревич — один из основоположников теории стрельбы, К. А. Яниш — известный математик и механик, ** С. В. Кербедзь — знаменитый русский военный инженер и профессор строительного искусства; Д. И. Журавский — выдающийся ученый и военный инженер, строитель мостов и железных дорог, создатель теории расчета рас-

* Вестн. Военно-инж. акад. им. В. В. Куйбышева, вып. 43, М., 1945, стр. 6.

** О К. А. Янише см.: С.-Петербургские ведомости, 1872, № 2; Иллюстрированная газета, 1872, № 13.

косных ферм и теории скалывания при изгибе,* Ф. Ф. Перотт — профессор математики в Институте инженеров путей сообщения, П. Л. Лавров — профессор математики Михайловского артиллерийского училища и Артиллерийской академии.

Деятельным помощником Остроградского в Михайловской артиллерийской академии был П. Е. Рощин, автор двух исследований по математическому анализу, по теории вероятностей, написавший замечательный учебник по дифференциальному и интегральному исчислению, а в Инженерной академии — В. И. Беренс, автор исследования по теории приближенных вычислений и нескольких учебных руководств. Этот список учеников Остроградского можно было бы значительно расширить, но и сказанного достаточно для того, чтобы убедиться, какую многочисленную школу имел наш знаменитый ученый.**

Если внимательно проанализировать деятельность учеников Остроградского, то для всех них можно обнаружить ряд весьма характерных общих черт. Прежде всего необходимо отметить, что влияние Остроградского сказалось на тематике научного творчества этих ученых.

Первой большой работой Вышнеградского было сочинение «О движении системы, определяемой полными дифференциальными уравнениями»; здесь автор изложил общие принципы и уравнения динамики в духе Остроградского.

О влиянии Остроградского на творчество этого ученого проф. Л. В. Кирпичев писал: «Для Ивана Алексеевича Вышнеградского такими учителями, сообщившими начальный импульс его замечатель-

* О Д. И. Журавском см.: Люди русской науки, ч. II, 1948, стр. 906—913; Журавский Дмитрий Иванович. СПб., 1897.

** Отметим, что ученики Остроградского сохранили самые восторженные воспоминания о своем учителе. «Мой отец, — писал А. Н. Крылов, — сам не был в Артиллерийской академии, но, дожив до глубокой старости, он всю жизнь поддерживал дружеские отношения с некоторыми своими товарищами артиллеристами, бывшими учениками Остроградского, и мне самому приходилось слышать, с каким восторгом, через 45—50 лет, эти заслуженные старцы вспоминали своего учителя» (Архив АН СССР, ф. 759, оп. 1, № 354, стр. 14).

ным талантам, послужили Остроградский и Родтенбахер. Наш знаменитый геометр образовал целую школу русских математиков. Я думаю, что влияние его продолжается до нашего времени и даже решусь высказать мысль, что это влияние есть одна из причин современного блестящего положения математических наук в России. Как известно, Остроградский много занимался аналитической механикой, к области которой относятся наиболее замечательные его труды; понятно, что уроки такого гениального учителя направили на механику деятельность и симпатии Ивана Алексеевича».*

Наиболее крупной работой Паукера было сочинение «Начало возможных перемещений», в котором этот вопрос изложен также согласно с воззрениями Остроградского на этот принцип.

Магистерская диссертация Будаева была посвящена вопросу о равновесии твердого тела, погруженного в жидкость. Эта проблема занимала и самого Остроградского.

Янишь написал работу «О началах равновесия и движения» под влиянием идей Остроградского. В предисловии к этой книге Яниш отмечал: «Центром всей математической деятельности в России вполне можно назвать Остроградского. Его ученые труды, его уроки, его советы, может быть, служат основанием всему, что по части математических наук делается у нас хотя несколько замечательного. . . Поводом к настоящему сочинению служили мысли изложенные в мемуаре Остроградского „Considérations générales sur les moments des forces". Автор был одушевлен желанием распространить в кругу русских математических читателей и сделать ему доступным новые и прекрасные идеи о теории равновесия и движения, заключающиеся в этом мемуаре».**

Беренс посвятил свои исследования теории приближенных вычислений — теме, навеянной также Остроградским.

В списке работ Сабинина, ученика Остроградского по Главному педагогическому институту, профессора университета в Одессе,

* Л. В. Кирпичев. И. А. Вышнеградский как ученый и профессор. Вестн. Общества технологов, 1895, № 6, стр. 96.

** Цит. по: А. А. Космодемьянский. Очерки по истории механики в России. Учен. записки МГУ, т. II, вып. 122, М., 1948, стр. 219.

имеются следующие: «Доказательство одной формулы Остроградского, относящейся к исчислению вариаций кратных интегралов», «О рассуждениях Остроградского и Якоби, относящихся к принципу наименьшего действия», «Исследование наибольших и наименьших значений определенных многократных интегралов», «Об остаточном члене формулы Гаусса», «Курс вариационного исчисления» и др. Влияние Остроградского здесь очевидно.

Работы Рощина, другого ученика Остроградского по Главному педагогическому институту, были связаны с продолжением исследований Остроградского по теории определенных интегралов и по теории вероятностей.

Идеи Остроградского отразились и на направлении творчества многих русских математиков, не учившихся непосредственно у Остроградского и, следовательно, не являвшихся столь близкими к нему, как его «военные» ученики. Так, Н. Д. Брашман во многом следовал за Остроградским в своей «Теории равновесия тел твердых и жидких». Влияние Остроградского сказалось и на работах И. И. Сомова: «Теория определенных алгебраических уравнений высших степеней»,* «Рассуждение об интегралах алгебраических иррациональных дифференциалов с одною переменною».

А. Ю. Давидов и Ф. А. Слудский были также последователями и носителями идей Остроградского, о чем Н. Е. Жуковский писал: «Широта анализа Остроградского отразилась на работах А. Ю. Давидова, удостоенных премии Демидова. Мой высокочтимый учитель Ф. А. Слудский был носителем идей Лагранжа и Остроградского. На лекциях он часто вспоминал Остроградского и с особым удовольствием излагал в его духе статью об отрицательных моментах и о начале наименьшего действия».**

Кроме того, под влиянием Остроградского оказались почти все учебные руководства по математике и механике, принадлежав-

---

* В предисловии к этой книге Сомов писал: «Я взял за основную мысль мнение Абеля и академика Остроградского о предмете алгебры, о различии алгебраических функций от трансцендентных и о решении алгебраических уравнений».

** Цит. по кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский, стр. 46.

шие перу его учеников: «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление» Беренса, «Теоретическая механика» Будаева, «Записки по дифференциальному и интегральному исчислениям» Рощина, «Элементарная механика» Вышнеградского, «Курс практической механики» Ястржембского, первая часть «Памятной книжки инженера и архитектора» Собко и др.

Общими чертами учеников Остроградского являлись интерес к прикладным вопросам, активность технической мысли в использовании научных открытий и широкое применение аналитического аппарата к задачам инженерной практики. Эти черты возникли бесспорно под влиянием нашего знаменитого математика.

Все близкие ученики Остроградского начинали свою научную карьеру как математики или механики. Первые их работы были посвящены теоретическим проблемам чистой математики или теоретической механики, а первоначальная педагогическая деятельность протекала на математических кафедрах высших военно-учебных заведений. Но, занимаясь наукой, они неизменно стремились к практическому применению ее и выдвигались затем как крупнейшие представители технической мысли в России.

Паукер, например, начал свою деятельность как математик на кафедре Остроградского в Главном инженерном училище. Первая его научная работа была чисто математического характера, но затем он выдвинулся на инженерном поприще и стал крупнейшим военным инженером. Вышнеградский получил первую ученую степень за математическую работу и довольно долго преподавал математику. То же самое можно сказать и о Петрове, и о Кербедзь, и о многих других учениках Остроградского.

Но и те из них, которые остались математиками, непременно занимались наряду с чисто математическими исследованиями и прикладными проблемами. Так, например, Будаев, будучи профессором математики и механики, успешно занимался и вопросами баллистики; то же самое можно сказать и о Собко, Перотте, Кузьмине.

На научном творчестве учеников Остроградского лежит ярко выраженная печать хорошей математической школы. Занимаясь прикладными проблемами, последователи знаменитого математика

и в постановке задач, и в подходе к решению их, и в трактовке результатов оставались строгими аналитиками. Их работы отличаются тонким математическим анализом и стремлением к широким обобщениям, столь характерным для математического таланта самого Остроградского, в творчестве которого, по меткому выражению Жуковского, «нас привлекает общность анализа, основная мысль, столь же широкая, как широк простор его родных полей».*

Возьмем для примера работу Паукера «О поверке устойчивости цилиндрических сводов».** Введение посвящено обзору исследований по математической теории устойчивости цилиндрических сводов и строгой критике работ французских авторов. В первой главе автор дал более общую, чем у Кулона, систему неравенств, характеризующую устойчивое состояние свода. При этом он нашел наглядный геометрический критерий для поверки того, удовлетворяется ли в данном своде установленная им система неравенств. Во второй главе Паукер приложил к расчету сводов принцип возможных перемещений в форме, данной Остроградским в 1835 г.***

Первая по времени работа Петрова «Очертание зубцов круглых цилиндрических колес дугами круга» содержит решение интересной и важной задачи о наивыгоднейшем подборе окружности для образования профиля зубцов. О математическом уровне этой задачи можно судить хотя бы по тому, что решением ее занялся П. Л. Чебышев.****

С особенной яркостью математический характер творчества Петрова выразился в решении проблемы о динамических напряжениях в рельсе. Над решением этой труднейшей задачи в теории упругости трудился до Петрова английский математик Стокс, давший дифференциальное уравнение деформации лежащего на упругих опорах рельса под давлением катящегося колеса. Однако интегрирование уравнения Стокса оказалось невозможным. Петрову удалось

* Н. Е. Жуковский, Полн. собр. соч., т. IX, 1937, стр. 414.

** Инж. записки, ч. XXXII, № 1, 1849, стр. 1—118.

*** Вестн. Военно-инж. акад. им. В. В. Куйбышева, вып. 43, М., 1945, стр. 8.

**** См.: П. Л. Чебышев, Собр. соч., т. II, СПб., 1907, стр. 126—162.

свести эту чисто динамическую задачу к статической, заменить уравнение Стокса двумя разностными уравнениями и произвести их численное интегрирование.

Вышнеградский твердо поставил рассмотрение процесса регулирования на почву динамики и свел задачу к рассмотрению линейных дифференциальных уравнений. При решении этих уравнений он пришел к знаменитым «неравенствам Вышнеградского», которые с тех пор кладутся в основу расчета регуляторов. Позже немецкие математики Гурвиц и Раус, занимаясь теорией регулирования, получили «неравенства Гурвица-Рауса», являющиеся не чем иным, как обобщением неравенств Вышнеградского. Исследования Вышнеградского находятся в тесной связи с общей теорией устойчивости, которая, как известно, служила предметом изысканий Жуковского, Ляпунова и др.

Касаясь математической стороны работ Вышнеградского, А. А. Андронов пишет: «На многих дальнейших, даже прикладных работах И. А. Вышнеградского заметна отличная математическая школа, изящество выкладок и геометрических построений»;* Андронов подчеркивает, что это — результат влияния Остроградского.

О математическом уровне чисто инженерных работ Кербедзь можно судить хотя бы по тому факту, что он, занимаясь почти исключительно прикладными вопросами, был избран членом-корреспондентом Академии наук по разделу математики.**

Сочинение Журавского «О мостах раскосных систем Гау» было отмечено демидовской премией на основании положительных отзывов Чебышева и инженер-генерала Дестрема, отметивших высокую математическую культуру автора.***

Все эти примеры свидетельствуют о том, что названные знаменитые русские инженеры, вышедшие из математической школы Остроградского, подняли русскую техническую мысль на весьма высо-

* А. А. Андронов. И. А. Вышнеградский. В сб. «Люди русской науки», т. II, М.—Л., 1948, стр. 932.

** Изв. собрания инженеров путей сообщ., т. XX, 1900, стр. I—II.

*** Отчеты о присуждениях наград камергера П. И. Демидова, 1855, № 24.

кий уровень и придали ей более строгий и глубокий научный характер.

Еще одна черта, объединяющая учеников Остроградского — это глубокий интерес к педагогическим вопросам. Остроградский, как указывалось, был не только ученым, но и педагогом по призванию. Эта черта передалась и его ученикам. Петров, Вышнеградский Кербедзь, Будаев, Собко, Ястржембский, Лавров, Перотт, Шклярееич, Симашко, Беренс были прекрасными лекторами. В своих лекциях они, по примеру своего знаменитого учителя, старались добиваться изящества, строгости и простоты изложения.

Кирпичев, характеризуя Вышнеградского как лектора, писал: «Многочисленные бывшие слушатели И. А. Вышнеградского сохраняют восторженные воспоминания о его лекторском таланте. Он имел редкий дар приковать внимание слушателей к объясняемому предмету, заинтересовать их. . . В этом отношении он являлся вполне достойным своих знаменитых учителей Остроградского и Родтенбахера, которые оба славились своими лекторскими талантами. Еще живы некоторые из учеников Остроградского, и по отзывам их, наш геометр не имел никого ему равного по таланту изложения».*

Многие из учеников Остроградского были не только прекрасными лекторами, авторами учебных руководств, но и крупными деятелями русского просвещения, убежденными борцами за улучшение методов преподавания.

Вышнеградский, например, являлся автором проекта развития профессионального образования в России, который впоследствии был принят и заметно улучшил дело. Петров также развернул большую педагогическую деятельность и глубоко интересовался педагогическими вопросами.** Достаточно сказать, что проблемам обучения он посвятил 13 работ.

Лавров был, как упоминалось, прекрасным педагогом, пользовавшимся любовью слушателей. Вместе с тем он являлся деятель-

* Вестн. Общества технологов, 1895, № 6, стр. 100.

** М. Н. Петров. Н. П. Петров. Очерк жизни и деятельности. М., 1925.

ным помощником Остроградского в его работе по руководству математическим образованием в военно-учебных заведениях России. Другие ученики Остроградского: Собко, Ястржембский, Беренс, Симашко, Перотт, были также видными педагогическими деятелями.

Влияние Остроградского сказывалось и на педагогической деятельности многочисленных профессоров и преподавателей невоенных учебных заведений. Например, ученики Остроградского по Главному педагогическому институту Д. М. Деларю и Е. И. Бейер являлись известными профессорами физико-математического факультета Харьковского университета.

Об идейном влиянии Остроградского на педагогическую деятельность его учеников Деларю писал: «Помимо своих специальных исследований, доставивших ему европейскую знаменитость, М. В. Остроградский заслуживает особенной признательности от нас, русских. В лекциях своих он всегда являлся замечательным систематизатором, всегда вооружался против рутинных приемов и проводил общие взгляды на соотношение между собою отдельных научных методов. Мысли его сохранились и развивались его учениками, искренне чтившими память замечательного нашего ученого. Мне кажется, что и в моем сочинении я следовал направлению, указанному Михаилом Васильевичем».*

Таким образом, Остроградский нам дорог не только результатами собственной научной деятельности, но и как основатель русской школы механиков и обширной инженерной школы.

Через Брашмана, Давыдова, Слудского он оказал воздействие на Н. Е. Жуковского и вместе с тем на всю московскую школу механики, а через Сомова, Чебышева, Бобылева — немалое влияние на научное творчество А. М. Ляпунова, Г. К. Суслова, В. А. Стеклова, И. В. Мещерского, А. Н. Крылова и других представителей петербургской школы.

Как петербургская, так и московская ветви школы Остроградского восприняли от своего учителя умение в конкретных практических задачах находить истоки глубоких теорий, а в глубоких

* Д. М. Деларю. Курс дифференциального исчисления и теории алгебраических функций. Харьков, 1869 (предисловие).

абстрактных теориях — широкие возможности для решения практических задач.

Об этой характерной особенности школы Остроградского образно сказал проф. Н. Д. Моисеев: «Школа Остроградского была единственной в мировой науке научной школой в области механики, которая, продолжая свою деятельность более столетия, нашла единственный методологически здоровый путь между сциллой „чистой теории“, оторванной от практики, и харибдой „прикладной механики“, оторванной от строгой теории. В этом заключается великая историческая роль школы Остроградского».*

* *
*

Сохранилось очень мало сведений о личной жизни Остроградского, о его привычках, интересах, привязанностях. То немногое, что нам известно, заимствовано из воспоминаний его учеников и родственников.

Остроградский был общительным человеком, находчивым, остроумным и интересным собеседником. Он любил «пофилософствовать» на военные темы, разбирать действия великих полководцев, обсуждать их ошибки и проектировать свои планы сражений; в этом сказались его постоянное общение с военными учебными заведениями и юношеское увлечение военной службой.

Остроградский обладал прекрасной памятью, что давало ему возможность запоминать многие литературные и исторические произведения, прочитанные даже в ранней юности. Некоторые поэтические произведения он знал наизусть, особенно хорошо помнил стихи Т. Г. Шевченко, с которым находился в дружеских отношениях. В дневниках Шевченко имеется следующая запись, сделанная им вскоре после возвращения из долголетней ссылки в 1858 г.: «От Н. Д. Старова поехали мы с Семеном ** к М. В. Остроградскому. Великий математик принял меня с распростертыми объятиями как земляка и как надолго отлучившегося куда-то своего семьянина.

* Сб. «Механика в СССР за тридцать лет», М.—Л., 1950, стр. 16.

** Є. С. Гулак-Артемовский — автор оперы «Запорожец за Дунаем», известный оперный певец.

Спасибо ему!».* Отношение Остроградского к Шевченко, бывшему крепостному, свидетельствует о том, что он высоко ценил замечательный талант великого поэта-демократа. Занимался Остроградский нерегулярно. Зато, когда новая идея приходила ему в голову, он работал с упоением, просиживая дни и ночи.

В 1831 г. Остроградский женился на М. В. Купфер, от которой имел сына и двух дочерей. Часы досуга он проводил в обществе детей, своих и брата, возился с ними, придумывал различные игры. Детей Остроградский вообще любил. Находясь в каникулярное время в своей деревне, он собирал ребятишек, отправлялся с ними на речку купаться и там устраивал настоящие сражения.

Детство, проведенное на Украине, на всю жизнь определило привязанность Остроградского к украинскому языку. Украинские словечки он любил вставлять в свою речь, не без удовольствия пользовался ими на лекциях.

Остроградский был высокого роста, полный, имел громкий голос и грозный внешний вид, особенно после потери правого глаза. Здоровьем отличался крепким. По замечанию А. Н. Крылова, «крепости организма Михаила Васильевича мог позавидовать сам Тарас Бульба, ибо даже тогдашней септической хирургии и полузнахарской медицине понадобилось четыре месяца, чтобы свести его в могилу».**

Из материалов, касающихся болезни и смерти Остроградского, известно, что лето 1861 г. он по обыкновению проводил в своей деревне *** и там опасно заболел. У него образовался злокачественный нарыв на спине. Была произведена операция, принесшая больному облегчение. Остроградский стал рваться в Петербург. Ни врачи, ни родные не могли отговорить его от этой поездки. Только новое ухудшение здоровья изменило его первоначальное намерение, и решено было для предварительного врачебного консилиума ехать в Харьков. Во избежание грустного прощания с родными он вышел незамеченным во двор, сел в экипаж и уехал.

---

* Т. Шевченко, Полн. собр. соч., т. 3, Киев, 1949, стр. 262.

** Цит. по кн.: Б. В. Гнеденко. М. В. Остроградский, стр. 81.

*** Кобелякского уезда Полтавской губернии.

По дороге Остроградский остановился в Полтаве у друзей, так как дорога утомила его. По настоянию врачей он был вынужден остаться там.

Сохранились записи о последних днях жизни Остроградского. Вот некоторые отрывки из них: «. . . академик решил лучше остаться в Полтаве, чем продолжать свой путь, могущий усилить болезнь. „Если уж суждено умереть, то лучше умру между своими и на родине“, — сказал он. . . Михаил Васильевич на первых порах не отказывался от приема посетителей, и в тот же день * навестил его преподаватель математических наук Полтавского Петровского кадетского корпуса В. Ф. Барсов. На другой день инспектор классов кадетского корпуса, узнав от Барсова о прибытии в город М. В. . ., отправил к нему его же спросить, не угодно ли будет М. В. принять преподавателей математических наук? На это предложение больной с удовольствием согласился, говоря, что он рад видеть всех своих товарищей — так обыкновенно называл всегда покойный преподавателей математических наук в военно-учебных заведениях. . . М. В. не упускал случая осведомляться о ходе бывших в то время в корпусе экзаменов по математическим наукам, изъявляя большое сожаление, что не может присутствовать сам на них».**

Прошло около двух недель, и больной, казалось, стал поправляться, но 7 декабря он впал в лихорадочное состояние. Обнаружились признаки паралича легких, и 20 декабря 1861 г. (1 января 1862 г.) в 12 часов дня великий русский математик скончался.

В последние минуты, уже будучи на смертном одре, окруженный родственниками и близкими, Остроградский попросил бумагу, карандаш и торопливо сказал одному из окружавших его: «Пиши, пиши скорей!». Но тут голос его оборвался, и он умолк навеки.

Б. В. Гнеденко и *И. А. Марон.*

---

* В день его приезда в Полтаву.

** Архив АН СССР, разр. V, оп. 1-о, № 11, стр. 24—26. Автор записей — майор Виталий. . . (фамилия неразборчива).

ПРИМЕЧАНИЯ

Математический анализ

Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов

Работа была доложена 24 января 1834 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1835, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 3, 1-re part., стр. 35—58) под заглавием «Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

Эта работа в свое время привлекла к себе внимание ученого мира. Об этом свидетельствует тот факт, что она была не только перепечатана в «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (XV, 1836), но впоследствии и полностью опубликована на английском языке в приложении к известной книге Тотгентера.*

После Остроградского вопросом о вариации кратного интеграла занимались Коши (1844) и Саррюс (1848). Мемуар Саррюса, опубликованный с опозданием, явился ответом на предложенную Парижской Академией еще в 1840 г. тему об условиях экстремума кратного интеграла и был удостоен премии. Между тем в мемуаре Остроградского, вышедшем в свет раньше, уже содержалось все необходимое для решения поставленного вопроса. К тому же рассуждения и результаты Саррюса (а также и Коши) небезупречны.**

[1] В позднейшей заметке «Об одном определенном интеграле»*** Остроградский возвращается к выводу выражений для вариаций δp, δq, δr, ... частных производных

$$p=\frac{du}{dx}, \quad q=\frac{du}{dy}, \quad r=\frac{du}{dz}.$$

---

* J. Todhunter. A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. Cambridge, 1861, стр. 111—139.

** Подробнее об этом см.: Е. Ф. Сабинин. Михаил Васильевич Остроградский. Матем. сборник, т. XXII, 1902.

*** Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pétersbourg, 1861, t. 3, стр. 66—67.

«Можно прийти непосредственно к этим выражениям, — говорит он, — заменяя du и δu в основном равенстве $\delta du = d\delta u$ сразу их значениями

$$pdx + qdy + rdz + \ldots,$$

$$p\delta x + q\delta y + r\delta z + \ldots + \omega,$$

где ω есть изменение u, происходящее от вариации формы этой функции. Дифференцируя со знаками δ и d, после подстановки, о которой говорилось, и отбрасывая то, что взаимно уничтожается, получим

$$dx\delta p + dy\delta q + dz\delta r + \ldots = dp\delta x + dq\delta y + dr\delta z + \ldots + \omega,$$

откуда, сравнивая коэффициенты при dx, dy, dz, ...,

$$\delta p = \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y + \frac{dp}{dz}\delta z + \ldots + \frac{d\omega}{dx},$$

$$\delta q = \frac{dq}{dx}\delta x + \frac{dq}{dy}\delta y + \frac{dq}{dz}\delta z + \ldots + \frac{d\omega}{dy}.$$

«Мы заметили это упрощение непосредственно после публикации нашего мемуара, но не сочли его достаточно важным, чтобы опубликовать его без представившегося для этого случая».

[2] Здесь знак суммы S заменяет интеграл; его не следует путать со знаком $\mathcal{S}$ на стр. 19, который имеет другой смысл.

Излагаемый дальше вывод выражения для вариации δV, как разъяснено в прим. 5, неубедителен. В последующей статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (помещенной в настоящем сборнике) Остроградский на примере двойного интеграла дает другой вывод для δV, избежав предварительно вычисления вариаций «дифференциальных элементов».

[3] Символом $\mathcal{S}(a.b.c\ldots)$ Коши обозначает детерминант, или определитель, так что

$$\mathcal{S}\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\cdots\right)$$

есть не что иное, как функциональный определитель системы функций X, Y, Z, ... относительно независимых переменных x, y, z, ...

Формула Остроградского $dXdYdZ\ldots = \mathcal{S}\left(\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dZ}{dz}\cdots\right)dxdydz\ldots$ лишь формой записи отличается от формулы Якоби, опубликованной примерно в то же время (в конце 1833 г.)* в связи с вопросом о замене переменных в кратных интегралах,

$$d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2} = \left(\sum \pm \frac{\partial \xi_1}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial \xi_2}{\partial v_2}\cdots\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial v_{n-2}}\right) dv_1 dv_2 \ldots dv_{n-2}.$$

* Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. 12, 1833; см. также: C. G. J. Jacobi. Werke, Bd. III, 1884, стр. 193—268.

Это — первые случаи использования функциональных определителей произвольного порядка. Таким образом, честь их введения Якоби разделяет с Остроградским.

[4] Если dX, dY, $dZ, \ldots$ связаны с dx, dy, $dz, \ldots$ обычными соотношениями

$$dX = \frac{dX}{dx}\,dx + \frac{dX}{dy}\,dy + \frac{dX}{dz}\,dz + \ldots \text{ и т. п.},$$

то никак (даже «с точностью до бесконечно малых высших порядков») не может иметь место та формула, которой заканчивается предыдущее примечание. Таким образом, буквально понимаемая формула Остроградского (или равносильная ей формула Якоби) неверна. Якоби в указанном месте приводит формулу «ради краткости» без доказательства, оставляя возможность истолковать ее как символическую запись того, что должно быть подставлено вместо $d\xi_1$, $d\xi_2 \ldots d\xi_{n-2}$ под знаком кратного интеграла при переходе к переменным $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$. Остроградский же, как мы видели, пытается доказать свою формулу, обобщая на случай произвольного числа переменных то рассуждение, которым в свое время воспользовался Лагранж* при выводе формулы замены переменных в тройном интеграле (см. прим. 1 к статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах»).

Ошибка Остроградского (повторяющая ошибку Лагранжа) заключается в том, что, вычисляя последовательно дифференциалы dX, dY, $dZ, \ldots$ через дифференциалы dx, dy, $dz, \ldots$, автор при каждом новом шаге вперед, сам того не замечая, пользуется уже другими, чем ранее, значениями этих последних дифференциалов; например, чтобы получить dY, нужны не те dx, dy, $dz, \ldots$, какие перед тем были использованы для получения dX, и т. д. Любопытно, что в последующей статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (о которой уже упоминалось) сам Остроградский говорит о всех этих вещах уже с полной отчетливостью.

[5] Здесь впервые в истории интегрального исчисления даются обстоятельные указания относительно расстановки пределов по каждой из переменных в отдельности при переходе от кратного интеграла к повторному. Для случая двойного и тройного интеграла подобные указания мы встречаем соответственно у Эйлера** и у Лагранжа,*** но в гораздо менее подробной форме.

---

* Nouveaux mémoires de l'Acad. de Berlin, 1773 (1775); см. также: Oeuvres de Lagrange, t. III, 1869, стр. 619—658.

** Novi commentarii Acad. sc. Petropolitanae, t. XIV, part. 1, 1769 (1770); см. также: L. Euler. Institutiones calculi integralis. T. IV, St.-Pétersbourg, 1845, стр. 416—445.

*** См. первую сноску на этой странице.

[6] Формулы (A), (B), (C) представляют собой обобщение — на многомерный случай — известной формулы Остроградского, связывающей тройной интеграл по трехмерной области с интегралом, взятым по поверхности, ограничивающей эту область (см. «Заметку по теории теплоты» М. В. Остроградского, также помещенную в настоящем сборнике).

В коэффициентах

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}},\quad \frac{\frac{dL}{dy}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}},$$

$$\frac{\frac{dL}{dz}}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\frac{dL^2}{dy^2}+\frac{dL^2}{dz^2}+\ldots}}$$

при P, Q, R, ... в правой части формулы (B) читатель узнает направляющие косинусы нормали к поверхности $L=0$, ограничивающей рассматриваемую многомерную область. В последующем делается попытка перейти к независимым параметрам a, b, c, ..., играющим как бы роль криволинейных координат точек поверхности.

Геометрическим языком Остроградский, однако, не пользуется: основы многомерной геометрии в ту пору еще не были заложены.

В более поздней заметке, уже упоминавшейся в прим. 2, Остроградский возвращается к формуле (B) и получает с ее помощью аналог формулы Грина для многомерного случая

$$\int\left[\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots\right)v-\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\ldots\right)u\right]dxdydz\ldots=$$

$$=\int\frac{\left[\left(\frac{dL}{dx}\frac{du}{dx}+\ldots\right)v-\left(\frac{dL}{dx}\frac{dv}{dx}+\ldots\right)u\right]ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2}+\ldots}},$$

откуда выводит и некоторые следствия.

Г. М. Фихтенгольц.

Заметка о методе последовательных приближений

Работа была доложена 11 сентября 1835 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1836, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 3, стр. 233—238) под заглавием «Note sur la méthode des approximations successives». На русском языке публикуется впервые. Перевод В. И. Антроповой.

В работе рассматривается вопрос об интегрировании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи разложения по малому параметру, входящему в эти дифференциальные уравнения. Основная цель работы, как говорит сам автор, «состоит в том, что, с помощью удобного изменения уравнений, можно подготовить себе способы, которые можно полезно употребить для ограждения себя от членов, могущих привести к ошибочному приближению».

Члены, о которых говорит М. В. Остроградский, называются в небесной механике вековыми членами. Их характерной особенностью является вхождение в них независимого переменного (обычно времени) вне знаков тригонометрических функций.

Задачей об уничтожении вековых членов при применении метода последовательных приближений занимались многие астрономы. Известны работы Лапласа и Лагранжа по этому вопросу.

Остроградский поясняет свой метод (который имеет целью избежать появления вековых членов при применении метода последовательных приближений) на примере уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\alpha y^3.$$

Если отбросить нелинейный член αy^3, то оставшееся линейное уравнение даст порождающее периодическое решение. Основная идея состоит в одновременном разложении периода (или частоты) и самого решения по параметру α.

Принимая начальные условия $y=1$ и $\frac{dy}{dt}=0$ при $t=0$, Остроградский, ограничиваясь в известном смысле первым приближением при разложении по α, получает следующий результат:

$$y=\cos t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}+\frac{\alpha}{32}\left(\cos t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}-\cos 3t\sqrt{1-\frac{3\alpha}{4}}\right).$$

Указанное выше уравнение может быть точно проинтегрировано в эллиптических функциях, и Остроградский сравнивает полученное его методом приближенное решение с тем, которое может быть получено из точного решения при соответствующем приближении к нему. Указания на то, каким образом вести дальнейшие приближения, работа не содержит. Хотя в конце статьи имеется утверждение автора о том, что предложенный им метод вполне однозначно определяет все последовательные приближения, никаких разъяснений по этому поводу не приводится.

Метод одновременного разложения решения и периода по параметру, входящему в уравнение, или по произвольному параметру (произвольной по-

стоянной) получил широкое распространение, но значительно позже появления работы Остроградского, причем о последней нигде не упоминается.

В работе астронома Гюльдена * среди другого материала имеется и разбор примера Остроградского приведением к эллиптическим функциям. С книгой Гюльдена непосредственно связана известная работа А. Линдштедта,** где вполне отчетливо сформулирована основная идея разложений (о которой мы говорили выше), а именно Линдштедт объясняет появление вековых членов тем, что аргумент nt (n — частота) остается неизменным («Bei einer näheren Betrachtung der zur Anwendung gebrachten Annäherungsmethoden kommt man nämlich bald zu dem Resultate, es habe das Vorkommen der sekulären Glieder überhaupt darin sein Grund, dass man nur Annäherungen in der Werthen der Coefficienten p_0, p_1, . . . bewirken kann, während anderseits das Argument unverändert gleich nt gestetzt wird»).

Дальнейшее исследование этого вопроса мы находим в работах Пуанкаре и Ляпунова, в частности в знаменитой работе А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения». В этой работе подробно исследована возможность разложений решений некоторых систем дифференциальных уравнений по степеням произвольной постоянной без вековых членов и доказана сходимость таких разложений, когда они возможны.

Исследования этих авторов изложены в книге И. Т. Малкина «Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний» (М.—Л., 1949). В этой книге рассматривается и пример Остроградского, к которому применяется метод Ляпунова разложения по степеням произвольной постоянной. Но ввиду специфичности этого примера решение может быть истолковано в смысле разложения по параметру, входящему в уравнение. Приведем соответствующие вычисления из книги Малкина.

Вместо t вводится новая переменная τ, согласно формуле

$$t = \tau\,(1 + h_2c^2 + h_4c^4 + \ldots),$$

и решение уравнения ищется в виде

$$y = c\cos\tau + c^3y_3(\tau) + c^5y_5(\tau) + \ldots,$$

где $y_j(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π, удовлетворяющие начальным условиям

$$y_3(0) = y_5(0) = \ldots = 0, \quad \left.\frac{dy_3}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dy_5}{dt}\right|_{t=0} = \ldots = 0,$$

* H. Gylden. Über die Convergenz der Successiven Annäherungen bei der theoretischen Berechnung der Bahnen der Himmelskörper. 1881.

** A. Lindstedt. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pétersbourg, 1883, VII sér., t. 31, № 4.

c — произвольная постоянная и коэффициенты h_k определяются из условия уничтожения вековых членов в выражениях $y_j(\tau)$.

Первое приближение дает

$$h_2 = \frac{3}{8}\alpha, \quad y_3(\tau) = \frac{\alpha}{32}\cos\tau - \frac{\alpha}{32}\cos 3\tau,$$

а следующее

$$h_4 = \frac{57}{256}\alpha^2, \quad y_5(\tau) = \frac{23}{1024}\alpha^2\cos\tau - \frac{3}{128}\alpha^2\cos 3\tau + \frac{1}{1024}\alpha^2\cos 5\tau.$$

Если ограничиться первым приближением, то получим, при $c = 1$,

$$t = \tau\left(1 + \frac{3}{8}\alpha\right) \text{ и } y = \cos\tau + \frac{\alpha}{32}\cos\tau - \frac{\alpha}{32}\cos 3\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{3}{8}\alpha}\, t = \left(1 + \frac{3}{8}\alpha\right)^{-1} t,$$

или до членов первого порядка по отношению к α

$$\tau = \left(1 - \frac{3}{8}\alpha\right) t.$$

Такая же частота получается и у Остроградского:

$$\sqrt{1 - \frac{3\alpha}{4}} = \left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{8}\alpha + \ldots$$

Выражение для y в указанных пределах точности также совпадает с тем которое получилось у Остроградского.

Для рассматриваемого примера вопрос сходимости последовательных приближений легко исследовать на основе представления решения через эллиптические функции.

Отметим, что история рассматриваемого вопроса об уничтожении вековых членов с указанием на статью Остроградского изложена в работе академика А. Н. Крылова «О применении последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения» (Собрание трудов А. Н. Крылова, т. V).

[1] Утверждение о сходимости рядов не является оправданным. В дальнейшем изложении сходимость метода последовательных приближений вообще не рассматривается.

[2] Всякое приближение само определяется дифференциальным уравнением; тем самым вводятся новые произвольные постоянные, которые, естественно, определяются начальными условиями, равными нулю. Новыми произвольными постоянными являются также коэффициенты в разложении частоты по параметру. Именно благодаря этим постоянным удается избавиться от вековых членов

[3] При разложении $\frac{1}{1-\frac{3\alpha}{4}}=1+\frac{3\alpha}{4}+\frac{9\alpha^2}{16}+\ldots$ надо удержать лишь единицу и при первом приближении, так как перед дробью уже стоит множитель α.

В. И. Смирнов.

О преобразовании переменных в кратных интегралах

Работа была доложена 12 августа 1836 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1836, VI ser., sciences math., phys. et nat., t. 3, 1-re part, стр. 401—407) под заглавием «Sur la transformation des variables dans les intégrales multiples».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

Преобразование переменных в двойных интегралах было впервые выполнено Эйлером в 1769 г.* Поставив вопрос о том, чем нужно заменить произведение $dxdy$ дифференциалов старых переменных x и y при переходе к новым t и u, Эйлер замечает прежде всего, что «нет никакого разумного основания, почему бы выражение, вводимое в вычисление вместо $dxdy$, должно быть ему равно». И далее: «. . .формула, вводимая вместо $dxdy$, вовсе не должна оцениваться с точки зрения равенства, но скорее — быть приноровлена к поставленной цели». Так как, однако, следует различать интегрирование по новым переменным t и u, то подставляемое взамен $dxdy$ выражение во всяком случае должно содержать множителем $dtdu$, т. е. иметь вид $Zdtdu$.

Разыскание выражения Z Эйлер осуществляет совершенно формально, вводя новые переменные последовательно (этим приемом с необходимыми уточнениями часто пользуются и сейчас). Если положить

$$dx=Rdt+Sdu, \quad dy=Tdt+Vdu,$$

то упомянутое выражение в конечном счете оказывается равным $VR-ST$, т. е. как раз функциональному определителю. Впрочем, в отношении знака этого выражения у Эйлера возникает «тяжкое сомнение», ибо перемена ролей x и y влечет за собой и изменение знака.

---

* См. сноску на стр. 460.

Так как сама площадь «основания» (т. е. области, на которую распространяется исходный интеграл) выражается интегралом

$$\iint Zdtdu,$$

то желание, чтобы «площадь оказывалась положительно выраженной», приводит Эйлера к мысли ставить перед выражением $Z = VR - ST$ такой знак, который делал бы его положительным. Еще раз подчеркнем, что выражение

$$\pm (VR - ST)\, dtdu,$$

окончательно подставляемое вместо $dxdy$, Эйлер получает совершенно формально и никак не истолковывает его геометрически. Этот пробел, как увидим ниже, и восполняет Остроградский.

Несколькими годами позже Эйлера вопросом о замене переменных уже в тройном интеграле занялся Лагранж.* Он, наоборот, сразу ставит вопрос геометрически и непосредственно задается целью выразить старый элемент объема $dxdydz$ через дифференциалы новых переменных dp, dq, dr, исходя из соотношений

$$dx = Adp + Bdq + Cdr,$$

$$dy = Ddp + Edq + Fdr,$$

$$dz = Gdp + Hdq + Idr.$$

Для этого Лагранж последовательно вычисляет все три измерения dx, dy, dz элементарного параллелепипеда. Так, чтобы получить dz, он полагает в предшествующих соотношениях $x = \text{const.}$ и $y = \text{const.}$, т. е. $dx = 0$ и $dy = 0$, затем исключает dq и dr и приходит к формуле (если воспользоваться привычными обозначениями определителей)

$$dz = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}\, dr.$$

Чтобы вычислить dy, Лагранж полагает $dx = 0$ и $dz = 0$, т. е.

$$dr = 0, \quad Adp + Bdq = 0,$$

исключает dp и находит

$$dy = \frac{\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix}}{A}\, dq.$$

---

* См. сноску на стр. 460.

Наконец, для вычисления dx он полагает $dy=0$ и $dz=0$, что дает

$$dr=0, \quad dq=0,$$

откуда

$$dx=A\ dp.$$

Если перемножить найденные значения dx, dy и dz, то окончательно получается

$$dxdydz=\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} dp\ dq\ dr.$$

Читатель видит, что именно это рассуждение было образцом для рассуждения самого Остроградского в «Мемуаре об исчислении вариаций кратных интегралов». В прим. 5 к нему мы выяснили сущность ошибки Остроградского; поэтому нет надобности здесь повторять это по отношению к Лагранжу.

Лагранж, подобно Эйлеру, делает замечание и о знаке определителя. Разумеется, и с этой поправкой выведенное им равенство не может быть понимаемо буквально. Но если перейти в подинтегральной функции к новым переменным, заменить формально $dxdydz$ выражением справа, а затем произвести интегрирование по новым переменным, то получится верный результат.

Остроградский впервые сумел стать на правильную геометрическую точку зрения, в гораздо большей степени проливающую свет на сущность преобразования переменных. Эту сущность применительно к двойным интегралам он справедливо усматривает в том, что область интегрирования разлагается не с помощью параллелей *осям* на традиционные прямоугольники, а с помощью координатных линий двух систем BF, CE, ... ($u=\text{const.}$) и MM', $M''M'''$, ... ($v=\text{const.}$) на криволинейные четырехсторонники вида $MM'M'''M''$. Дифференциальное выражение

$$i\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

которое у Эйлера лишь формально представлялось вместо $dxdy$, а у Лагранжа (если перенести его рассуждения на случай двух переменных) будто бы равнялось $dxdy$, у Остроградского находит, наконец, отчетливое геометрическое истолкование как площадь упомянутого элементарного четырехсторонника. При этом выражение в скобках сразу и вполне мотивированно получается с надлежащим знаком.

[1] Имеется в виду известное выражение $rdrdp$ элемента площади в полярных координатах.

Весь § I, по сути дела, содержит опровержение рассуждений Лагранжа (а также и собственных рассуждений Остроградского, о которых не раз упоминалось); здесь на простом примере показывается бессмысленность поисков реше-

ния вопроса о преобразовании переменных в двойном (аналогично и в тройном) интеграле путем выражения площади элементарного прямоугольника $dxdy$ (а в случае тройного интеграла — объема элементарного параллелепипеда $dxdydz$) через новые переменные и их дифференциалы.

Упрек по адресу Лагранжа справедлив. Но почему Остроградский наряду с Лагранжем упоминает и об Эйлере, представляется загадочным: в указанном отношении, как разъяснено нами выше, Эйлер ни в малейшей мере упрека не заслуживает.*

[2] Это привычное, но в данном контексте мало удачное обозначение дифференциального элемента, как видно из дальнейшего, не должно быть истолковано так, будто Остроградский ограничивается рассмотрением лишь прямоугольных элементов плоской фигуры.

Подчеркнем еще одно обстоятельство. Остроградский, который был младшим современником Коши, несомненно владел понятием предела.** Тем не менее, в работах, посвященных кратным интегралам, Остроградский этим понятием не пользуется, предпочитая более привычный язык XVII и XVIII вв. Он говорит об «элементе площади» и «дифференциальном параллелограмме» $dxdy$, иллюстрируя все это конечными чертежами, подобно Эйлеру; наряду с этим он прямо утверждает, что «интеграл $\int V dxdy$ есть сумма его дифференциальных элементов» и т. п.

[3] Родоначальником формального способа вывода правила преобразования переменных в кратных интегралах путем последовательного введения новых переменных был Эйлер (см. прим. 1). Как мы указали выше, Остроградский, став первым в этом вопросе на геометрическую точку зрения, разбивает область интегрирования на части координатными линиями $u=\text{const.}$, $v=\text{const}$

Нужно отметить, что определение положения точки на кривой поверхности с помощью координатных параметров (введенное Эйлером) было широко использовано Гауссом. Уже в 1813 г. Гаусс *** рассматривал два семейства кривых на поверхности, определяемые постоянными значениями того или другого из параметров, и даже дал выражение для площади элементарного криволинейного

* Кстати сказать, библиографическая ссылка, сделанная самим Остроградским, относится только к Лагранжу.

** См. указания по этому поводу в статье И. А. Марона «Академик М. В. Остроградский как организатор преподавания математических наук в военно-учебных заведениях России» (Историко-матем. исследования, вып. III, 1950) и особенно в статье Е. Я. Ремеза «О математических рукописях академика М. В. Остроградского» (Историко-матем. исследования, вып. IV, 1951).

*** Commentationes soc. sc. Göttingensis rec., t. II, 1813; см. также: C. F. Gauss, Werke, Bd. V, 1867, стр. 3—22.

параллелограмма на поверхности (отвечающего элементарному прямоуголь нику на плоскости параметров) через проекции его на координатные плоскости. Но исследование Гаусса велось совсем в другом плане, ибо целью его было изучение к р и в ы х поверхностей. Разбиение же п л о с к о й области интегрирования на криволинейные четырехсторонники в целях осмысления преобразования переменных в двойном интеграле составляет всецело заслугу Остроградского. Такой способ трактовки вопроса вошел давно во все учебники.

[4] Таким образом, Остроградский пытается дать такое изложение вопроса о замене переменных в двойном интеграле, чтобы его можно было распространить и на случай интеграла любой кратности. В рукописях Остроградского, судя по выполненному Е. Я. Ремезом их описанию,* имеется и общий вывод формулы замены переменных в n-кратном интеграле — по эйлерову методу п о с л е д о в а т е л ь н о г о введения новых переменных; этот вывод опубликован не был.

В печати доказательство общей формулы замены переменных в n-кратном интеграле впервые появилось в 1841 г. в работах Якоби ** и Каталана.*** В обоих случаях снова применен формальный метод Эйлера.

Г. М. Фихтенгольц.

Заметка о линейных дифференциальных уравнениях

Работа была доложена 26 октября 1838 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Bulletin scientifique publié par l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1839, t. V, № 3, col. 33—35) под заглавием «Note sur les équations différentielles linéaires».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

Найденная Остроградским в этой заметке формула, «заслуживающая того, чтобы о ней сказать», а именно

$$\Delta = ae^{-\int P dx}, \tag{1}$$

вошла в качестве одного из ф у н д а м е н т а л ь н ы х соотношений во все позднейшие систематические изложения теории линейных дифференциальных уравнений.**** Ее называют обычно формулой Лиувилля, хотя по справедливости ее бы следовало называть если и не ф о р м у л о й О с т р о г р а д с к о г о,

* См. сноску на стр. 468.

** Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. XXII, 1841; см. также: C. G. J. J a c o b i, Werke, Bd. III, 1884, стр. 395—498.

*** Mem. couron de l'Acad. des sc. de Bruxelles, t. XIV, partie 2, 1839—1840 (1841), стр. 3—47.

**** См., например: Ш. д е л а В а л л е П у с с е н. Курс анализа бесконечно малых, т. II. ГТТИ, 1933, стр. 246.

то формулой Остроградского-Лиувилля. В действительности, в том же 1838 г. Лиувилль,* независимо от Остроградского, пришел в порядке общих рассмотрений к соотношению более сложного характера, из которого результат (1) может быть получен, но он, во всяком случае, в работе Лиувилля не был сформулирован.

Экспоненциальное выражение $e^{-\int P dx}$, фигурирующее в формуле решения линейного однородного уравнения 1-го порядка и в столь же широко известной формуле общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка, для которого известно одно частное решение,** позволяет более или менее непосредственным образом проверить справедливость формулы (1) в случаях $n=1$ и $n=2$. В одной работе Абеля*** используемое попутно соотношение между двумя частными решениями линейного однородного уравнения 2-го порядка записано даже как раз в виде

$$y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} = e^{-\int P dx}.$$

Тем не менее можно считать установленным, что общая закономерность, выражаемая формулой Остроградского (1), никем из предшествовавших ему математиков не была обнаружена.

Было бы явно неправильным отождествлять формулу Остроградского (1) с любым соотношением, выражающим P через частные интегралы фундаментальной системы. Некоторое соотношение этого рода было получено в мемуаре Г. Либри **** в виде

$$P = -\frac{n}{y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} - \frac{(n-1)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} - \frac{(n-2)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d\frac{y_3}{y_1}}{d\frac{y_2}{y_1}}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{d\frac{y_3}{y_1}}{d\frac{y_2}{y_1}}\right)} - \ldots$$

Оно, очевидно, ни в какой мере не выявляет специфической закономерности, которая выражается формулой (1).

Е. Я. Ремез.

---

* J. Liouville. Note sur la théorie de la variation des constantes arbitraires. Journ. de mathém. pures et appl., t. (1), 3, 1838, стр. 342—349.

** L. Euler. Institutiones calculi integralis, t. II, St.-Pétersbourg, 1769, стр. 363.

*** N. H. Abel. Sur quelques intégrales définies. Journ. für die reine und ang. Mathem., t. 2, 1827, стр. 22; N. H. Abel, Oeuvres complètes, t. 1, Christiania, 1879, стр. 251—262.

**** Journ. für die reine und ang. Mathem., Bd. 10, 1833, стр. 167—194.

Об интегрировании рациональных дробей

Работа была доложена 22 ноября 1844 г. на заседании физико-математического отделения Академии наук и опубликована в «Bulletin de la classe phys.-math. de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1845, t. 4, col. 145—167, 286—300) под заглавием «De l'intégration des fractions rationnelles».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

Данная работа Остроградского, в которой впервые нашел свое решение один из фундаментальных вопросов теории интегрирования функций, именно вопрос об отделении (с помощью рациональных операций) алгебраической части интеграла от рациональной дроби, является дальнейшим развитием соответствующих результатов двух более ранних его мемуаров 1833 г. под аналогичным названием, посвященных нахождению упомянутого интеграла в том специальном случае, когда он в целом является алгебраическим: (А) — «Мемуара об интегрировании рациональных дробей»;* (Б) — «Продолжения мемуара об интегрировании рациональных дробей».** В мемуаре (Б) Остроградский, кроме того, распространяет свой метод на случай интеграла $\int R(x, y)dx$, где R — рациональная функция, а y выражается квадратным корнем из целой функции,*** с указанием на возможность аналогичного распространения и на случай корня любой степени n.

Мемуары (А) и (Б) сами по себе сыграли заметную роль в истории разработки вопросов интегрирования алгебраических функций; наряду с выдающимися работами Абеля и Лиувилля они определили в значительной мере тематику ранних исследований И. И. Сомова и П. Л. Чебышева. По свидетельству самого Сомова,**** он «почерпнул многие мысли» из мемуара Остроградского

---

* M. Ostrogradsky. Mémoire sur l'intégration des fractions rationnelles. Mém. de l'Acad. de St.-Pétersbourg, 1833, t. 2, стр. 569—593.

** M. Ostrogradsky. Suite du mémoire sur l'intégration des fractions rationnelles. Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pétersbourg, 1833, t. 2, стр. 657—671.

*** Вопросу отделения алгебраической части в таких интегралах, по образцу решения этого же вопроса в рассматриваемой нами работе Остроградского (1844), была посвящена работа М. А. Тихомандрицкого «Определение алгебраической части гиперэллиптических интегралов» (Сообщ. Харьк. матем. общества, 1885—1886). Простейший же элементарный случай этого вопроса был рассмотрен еще в книге Н. Алексеева «Начала интегрального исчисления» (М., 1861). Как видно из статьи Б. В. Гнеденко и И. А. Марона, помещенной в настоящем сборнике, результаты трех мемуаров Остроградского излагались знаменитым академиком также и в лекционных его курсах.

**** И. И. Сомов. Очерк жизни и ученой деятельности Михаила Васильевича Остроградского. Записки Акад. наук, т. 3, кн. 1, 1863, стр. 22.

об интегрировании рациональных дробей, под прямым влиянием которого и была написана магистерская диссертация Сомова.* Далее, трудно переоценить значение того факта, что один из вопросов, выдвинутых Остроградским в заключительной части его мемуара (Б),** непосредственным образом составил тему «рассуждения» магистра Чебышева «Об интегрировании помощью логарифмов»,*** представленного последним в качестве диссертации на право чтения лекций (pro venia legendi) Петербургскому университету в апреле 1847 г. и явившегося как бы программным вступлением к циклу последующих знаменитых работ Чебышева по интегрированию алгебраических дифференциалов.

Теория интегрирования рациональных дробей — один из краеугольных камней всего интегрального исчисления. Поэтому, естественно, задача интегрирования этих дробей должна была получить некоторое — хотя бы частичное — разрешение уже у основоположников анализа бесконечно малых — Ньютона и Лейбница.

Ньютон в своем «Рассуждении о квадратуре кривых»**** останавливается на интегрировании рациональных функций лишь попутно, в связи с изложением своего метода интегрирования посредством формальных степенных разложений. В простейших случаях рассматриваемые им степенные ряды могут обрываться после конечного числа членов, и именно таким образом интеграл рациональной дроби, в случае его алгебраичности, оказывается возможным получить в конечном виде также и по методу Ньютона. Его метод включает применение своеобразного (несколько тяжеловесного) способа неопределенных коэффициентов для прямого определения последовательности значений параметров, входящих в выражение искомого интеграла.

---

* Рассуждение об интегралах алгебраических иррациональных дифференциалов с одною переменною. М., 1841.

** Остроградский здесь говорит (стр. 669), что ему *известно решение* этого вопроса $\left(\text{о нахождении} \int \frac{L}{M} \cdot \frac{dx}{y}, \text{ где } y^2 = N;\ L, M \text{ и } N \text{ — целые функции}\right)$ во всех случаях, когда этот интеграл приводится к алгебраическим и логарифмическим функциям, и что он предполагает изложить результаты исследований по этому вопросу в другом мемуаре. Однако такое изложение в последующих опубликованных работах Остроградского не нашло места.

*** См.: Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева. Изд. АН СССР, т. V, 1951, стр. 88—145.

**** И. Ньютон. Математические работы. Перевод с латинского, вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. Гостехиздат, 1937, стр. 174—178.

Это делает его до некоторой степени родственным направлению соответствующих изысканий Остроградского, но, подобно Лейбницу и И. Бернулли, Ньютон также предполагает фактическое нахождение корней знаменателя заданной рациональной дроби; вместе с тем у этих авторов еще абсолютно нет речи о выделении алгебраической части интеграла от рациональной дроби общего вида.

От Лейбница * и, в неменьшей мере, от И. Бернулли ** ведет начало хорошо известный способ интегрирования рациональных дробей посредством разложения на простые дроби. Надлежащую законченность вполне оформленного метода этот способ получил в капитальных трудах Эйлера.*** Его трактовка вопроса с тех пор вошла в учебные руководства по анализу бесконечно малых и без существенных изменений сохранилась до настоящего времени в качестве наиболее распространенного элементарного метода интегрирования рациональных дробей. С именем Остроградского навсегда останется связанным следующий, завершающий этап в развитии теории формального интегрирования рациональных функций; таким этапом явился как раз рассматриваемый нами мемуар Остроградского.

Первый параграф мемуара является вводным. В конце его указывается, между прочим, что само рассуждение будет вестись без использования разложения заданной рациональной дроби на простые дроби; иначе предлагаемый метод «не являлся бы полной заменой метода Ивана Бернулли». В действительности, однако, основания для выбора независимого (прямого) способа вывода результатов Остроградского лежат глубже.**** С одной стороны,

---

* Acta Eruditorum, 1702—1703. Leibnizens mathematische Schriften, t. 4, стр. 350—361, 361—366; см. также: Успехи матем. наук, 3, вып. 1, 1948, стр. 182—184.

** Acta Eruditorum, 1703, 1719; Joh. Bernulli, Opera, t. I, стр. 393—400; t. II, стр. 402—418; см. также: M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, t. III, стр. 273—275. Во второй работе Бернулли был уже охвачен и случай кратных мнимых корней знаменателя.

*** Introductio in analysin infinitorum (1748) (см.: Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. 1. Гостехиздат, 1936, главы 2-я и 12-я); L. Euler. Institutiones calculi integralis, t, I, St.-Pétersbourg, 1768.

**** Если иметь в виду лишь вывод основной формулы Остроградского [формула (1) параграфа IV] и притом для вещественных дробей, то с чисто методической стороны можно было бы признать достаточно удобным как раз тот способ рассуждения, который базируется на предварительном рассмотрении «метода Бернулли» (разложения на простые дроби). См., например: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Гостехиздат, 1948, стр. 49—53.

дело идет о возможно единообразном выводе не только основной формулы Остроградского [формула (1) параграфа IV]

$$\int \frac{N}{M}\,dx = \frac{X}{P} + \int \frac{Y}{Q}\,dx, \tag{1}$$

но и последующих, значительно более далеко идущих результатов мемуара.

С другой стороны, хотя сам М. В. Остроградский этого и не подчеркивает нигде, его рассуждение и вся сумма результатов остаются в силе совершенно независимо от арифметической природы коэффициентов полиномов M и N, которые могут быть и комплексными (равно как и само переменное x).*

В параграфе II устанавливается формула Остроградского [(1) при $Y \equiv 0$] для случая алгебраической интегрируемости дроби $\frac{N}{M}$ [ср. более ранний мемуар (А), разд. II]. Это оказывается связанным с формулировкой двух условий алгебраической интегрируемости. Здесь же устанавливается частный случай одного алгебраического соотношения, которое в дальнейших параграфах получает обобщение и постоянное применение, являясь в то же время отправным пунктом оригинального метода разделения корней различной кратности, выдвинутого Остроградским еще в мемуаре (А). Положим**

$$\left(M,\ \frac{dM}{dx}\right) = P;\quad M = QP;\quad \frac{dM}{dx} = RP;\quad \left(P,\ \frac{dP}{dx}\right) = P_1;\quad P = Q_1P_1;$$

$$\frac{dP}{dx} = R_1P_1;\quad Q : Q_1 = q.$$

Тогда упомянутое соотношение будет

$$R - \frac{dQ}{dx} = qR_1, \tag{2}$$

причем $\left(Q,\ R - \frac{dQ}{dx}\right) = q$.

---

* Поскольку дело касается пригодного и для комплексной области вывода самой формулы (1) с последующим выделением вещественного случая как частного, это может быть достигнуто, как известно (ср.: Ш. де ла Валле Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. I. Гостехиздат, 1933, стр. 190—194), и на основе некоторого видоизменения «метода Бернулли», а именно применением разложения дроби $\frac{N}{M}$ не на простые (четырех типов), а на простейшие (двух типов). Однако построенное таким образом рассуждение оказывается по существу значительно более сложным, даже безотносительно к задаче установления дальнейших результатов мемуара М. В. Остроградского.

** Обозначения соответствуют принятым в дальнейших параграфах мемуара (ср. прим. 6).

Понимая под $X \equiv X(x)$ любой полином, мы будем иметь далее

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{X}{P}=\frac{Q\frac{dX}{dx}-X\left(R-\frac{dQ}{dx}\right)}{M}=\frac{q\left(Q_1\frac{dX}{dx}-R_1X\right)}{QP}=\frac{Q_1\frac{dX}{dx}-R_1X}{Q_1P}. \qquad (3)$$

Использование соотношений вида (3), естественно, найдет место при дифференцировании основной формулы (1) в различных случаях. По ходу развертывания рассуждения Остроградский вводит еще обозначения

$$\left(P_n,\ \frac{dP_n}{dx}\right)=P_{n+1};\ \ P_n=Q_{n+1}P_{n+1};$$

$$\frac{dP_n}{dx}=R_{n+1}P_{n+1};\ \ \frac{Q_n}{Q_{n+1}}=q_n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ i)$$

с соответствующим непосредственным обобщением соотношений (2) и (3).

В параграфе III рассматривается важный для дальнейшего вспомогательный вопрос, заключающийся в подборе числителя N (когда задан только знаменатель M) при условии алгебраической интегрируемости правильной дроби $\frac{N}{M}$.

Вопрос допускает бесчисленное множество нетривиальных решений ($N \neq 0$), за исключением вполне возможного случая $P=1$, $M=Q=q$,* для которого с необходимостью потребуется $N \equiv O$. Общая идея алгоритма отделения алгебраической части интеграла $\int\frac{N}{M}\,dx$ и будет заключаться (параграф IV) в выделении из дроби $\frac{N}{M}$ — при наличии у знаменателя хотя бы одного кратного корня — такой алгебраически интегрируемой дроби $\frac{\nu}{M}$, чтобы в остающейся дроби $\frac{N-\nu}{M}$ после сокращения знаменатель соответствовал уже упомянутому «особому» случаю (случаю отсутствия кратных корней).

Параграфы IV—VI посвящены установлению основных результатов всего исследования. В параграфе IV устанавливается в общем виде основная формула Остроградского (1). В ней все три дроби $\frac{N}{M}$, $\frac{X}{P}$

---

* Это случай $\left(\text{знаменателя } M, \text{ взаимно простого с } \frac{dM}{dx}\right)$ мог бы, разумеется, рассматриваться не как особый, а, скорее, как общее правило, если бы предметом изучения здесь не служили как раз такие дроби, знаменатели которых вообще не лишены кратных корней

и $\frac{Y}{Q}$ — правильные. Знаменатели P, Q, а затем и числители X, Y определяются всегда единственным образом (не считая, конечно, численного множителя при определении P; ср. прим. 10) посредством рациональных операций над полиномами M и N или над их коэффициентами. Когда $q \equiv 1$, дробь $\frac{Y}{Q}$ может в отдельных случаях оказаться сократимою или даже исчезнуть. Таким образом, в частности, исключительный по своему характеру случай алгебраической интегрируемости заданной дроби $\frac{N}{M}$ будет обнаружен непосредственно в результате самого вычисления.

Указывая (параграф V), что неизвестные параметры полиномов X и Y могут быть определены обычным способом неопределенных коэффициентов под условием тождественного выполнения [ср. уравнение (3)] соотношения

$$PY - q\left(R_1X - Q_1\frac{dX}{dx}\right) = N, \tag{4}$$

Остроградский замечает, что такая процедура может оказаться весьма тягостной, когда знаменатель M представляет собой полином более или менее высокой степени. И вот, для преодоления этой именно трудности, Остроградский развертывает дальнейшее исследование (параграфы V и VI), имеющее целью возможное расчленение требуемой вычислительной процедуры, с последовательным отделением от искомых дробей отдельных слагаемых со знаменателями P, P_1, $P_2, \ldots, P_i$ и соответственно Q, Q_1, $Q_2, \ldots, Q_i$ до исчерпания искомых дробей $\frac{X}{P}$ и $\frac{Y}{Q}$, причем на отдельных этапах число неизвестных параметров в числителях упомянутых частных дробей последовательно оказывается соответственно равным степеням полиномов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, Q_{i+1}$ и $q, q_1, \ldots, q_{i-1}, Q_1$. Так, например, на первом этапе процедуры Остроградский полагает

$$Y = qY_1 + r, \quad X = Q_1X_1 + \rho$$

и определяет (последовательно) два полинома r и ρ, степени которых соответственно ниже степеней q и Q_1, общим условием [ср. соотношение (4)] делимости выражения $N + qR_1\rho - Q_1P_1r$ на произведение qQ_1, причем само это условие допускает очевидное расчленение на два аналогичных, более простых. После этого задача будет уже заключаться в отыскании двух более простых дробей

$$\frac{X}{P} - \frac{\rho}{P} = \frac{Q_1X_1}{P} = \frac{X_1}{P_1} \text{ и } \frac{Y}{Q} - \frac{r}{Q} = \frac{qY_1}{Q} = \frac{Y_1}{Q_1}$$

с применением к ним аналогичного подхода и т. д.

Вторая часть мемуара, обнимающая четыре последних параграфа (VII—X), содержит в параграфе VIII некоторое видоизменение * вычислительной схемы параграфов V—VI. Параграфы VII и IX посвящены дополнительным замечаниям, связанным с анализом некоторых существенных элементов применяемых в мемуаре вычислительных процедур. Наконец, заключительный параграф X содержит подробный разбор численного примера, иллюстрирующего процедуру определения полиномов X и Y.

Во вступительном слове молодого Чебышева к защите упомянутой выше его диссертации «Об интегрировании помощью логарифмов» имеется между прочим обращенный к Остроградскому упрек, относящийся к оформлению трактовки способа неопределенных коэффициентов в его применении к определению неизвестных значений параметров в числителях различных искомых дробей.** Не подлежит сомнению, что упрек этот может быть отнесен лишь к внешней манере изложения соответствующих трех мемуаров Остроградского (1833 и 1844 гг.).

При внимательном чтении рассматриваемого нами мемуара создается определенное впечатление, что Остроградский, по-видимому, считает излишним останавливаться на некоторых деталях формального обоснования применяемой им алгебраической процедуры, ограничиваясь в ряде мест лаконическими ссылками на «известные» основы теории «делимости целых функций». Однако в ходе изложения он здесь везде, как правило, очень точно выявляет те существенные условия вопроса (ср. прим. 8, 10, 11), которыми в действительности и обеспечивается — в абсолютно строгом смысле — разрешимость затрагиваемых по ходу изложения метода алгебраических задач и однозначность их решения. В этом, на наш взгляд, и заключается смысл неоднократно повторяющихся в мемуаре лаконических формулировок, что такой-то полином «должен быть определен и всегда определится» [разрядка наша, — *Е. Р.*] из такого-то условия делимости.

Спустя много лет после рассматриваемых мемуаров Остроградского появилась небольшая работа Эрмита,*** которая в несколько иной форме содержит найденный еще раз результат, равносильный формуле Остроградского (1). Случилось так, что метод, предложенный Остроградским на несколько десятилетий ранее Эрмита и притом значительно глубже разработанный, вошедший в русскую учебную литературу 60—70-х годов прошлого столетия

* Ср. прим. 14 и 20.

** Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева. Изд. АН СССР, т. V, 1951, стр. 142.

*** Ch. Hermite. Sur l'intégration des fractions rationnelles. Ann. sc. de l'Ecole norm. sup., (2), 1, 1872, стр. 215—218; Ch. Hermite. Cours d'analyse. 1873, стр. 265—270. Близкую к стилю Эрмита трактовку вопроса можно найти в достаточно отчетливом изложении: Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 1. ОНТИ, 1936, стр. 218—221.

под именем настоящего его автора, стал в дальнейшем излагаться и в курсах анализа, и в таких распространенных изданиях, как, например, «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften» и других, под названием метода Эрмита. Мы полагаем, что эту ошибку — один из наиболее очевидных примеров исторической несправедливости — пора исправить раз навсегда, восстановив за этим методом имя его подлинного автора.

[1] Точнее говоря, степень X может всегда предполагаться меньшей, чем степень P: при равенстве степеней дело свелось бы, конечно, к выделению из дроби $\frac{X}{P}$ постоянного слагаемого, которое может быть включено в произвольную постоянную интегрирования.

[2] Читатель заметит, что Остроградский неоднократно употребляет здесь слово «значение» в смысле «выражение».

[3] Из этого второго условия, между прочим, непосредственно усматривается, что $\int \frac{N}{M} dx$ заведомо не может быть алгебраическим, если степень знаменателя M превышает степень числителя только на одну единицу. Таким образом, к дробям, заведомо не интегрируемым алгебраически, относятся не только такие, как $\frac{1}{x^2 \pm 1}$ или $\frac{x-2}{x^3+x^2}$ (не выполнено первое условие алгебраической интегрируемости), но и такие, как, скажем, $\frac{x}{(x+1)^2}$ [ср. соответствующие замечания и дальнейшие указания в первом мемуаре Остроградского (1833) об интегрировании рациональных дробей, а также обобщение, содержащееся в его заметке (1850 г.) о производных алгебраических функций].

[4] Здесь, очевидно, $d.QX$ обозначает $d(QX)$. В аналогичном смысле символ $d.$ постоянно применяется Остроградским и в дальнейшем тексте статьи для обозначения дифференциала произведения двух или нескольких сомножителей.

[5] Можно заметить, что резюмирующие заключения последнего абзаца остаются справедливыми и при более общих условиях, именно при возможной сократимости дроби $\frac{N}{M}$, а также и дроби $\frac{X}{P}$, как это будет иметь место, в частности, в рассмотрениях следующего параграфа III. Вместе с тем следует подчеркнуть, что представимость числителя дроби в указанном здесь виде является условием не только необходимым, но и достаточным для алгебраической интегрируемости дроби (ср. начало параграфа IV).

[6] Об «исключительном» случае будет сказано в конце этого параграфа.

[7] Следует иметь в виду, что применяемые в данном параграфе обозначения R' и R уже отнюдь не соответствуют обозначению R в предыдущем

параграфе II, где им в действительности соответствовало U. Для восстановления лучшей согласованности со всей последующей системой обозначений было бы достаточно в параграфе II заменить U на R и R на R_1.

[8] В данном контексте справедливость этого утверждения нетрудно уяснить при учете того факта, который был установлен в конце предыдущего параграфа в отношении «исключительного случая»: из рассматриваемой дроби $\frac{N}{M}$ заведомо невозможно выделить (отличную от тождественного нуля) алгебраически интегрируемую дробь, знаменатель которой был бы делителем данного знаменателя M; поэтому, как легко видеть, любая попытка выделения алгебраической части из $\int \frac{N}{M} dx$ по схеме $\int \frac{N}{M} dx = \frac{N_1}{M_1} + \int \frac{N_2}{M_2} dx$ может лишь привести к новому интегралу от дроби со знаменателем более сложным, чем M.

[9] Это уже видно хотя бы из прим. 3. Но пусть даже дано, что степень N ниже степени M по меньшей мере на две единицы. Система линейных уравнений для коэффициентов полинома X, соответствующая тождественному равенству $\frac{d.\,\overline{QX}}{dx} - RX = N$, не может быть разрешимой при произвольных значениях коэффициентов полинома N, поскольку соответствующая однородная система линейных уравнений здесь заведомо допускает нетривиальное решение, получаемое при $X \equiv P$ (ср. эквивалентное равенство в ближайших строках мемуара). Положение не изменится и в том случае, когда мы явным образом добавим условие несократимости дроби $\frac{N}{M}$, поскольку это условие не означает установления какого-нибудь линейного соотношения между коэффициентами полинома N.

[10] Здесь предварительная общая оценка ситуации может, очевидно, основываться хотя бы на том соображении, что остаток от деления рассматриваемого выражения на Z должен быть той же степени, как и искомый полином X (ср. подход к практическому решению аналогичных вопросов в начале параграфа IX и в параграфе X мемуара).

[11] Для строгого установления факта однозначной разрешимости рассматриваемой здесь задачи определения целых функций X и Y при любых значениях коэффициентов полинома N достаточно опереться на тот известный элементарный критерий линейной алгебры, на который мы выше (прим. 8) уже имели случай сослаться (с противоположным заключением) в связи с разъяснением вопроса о невозможности в общем случае алгебраического интегрирования рациональной дроби, взятой наудачу. Соответствующая однородная задача и в данном вопросе относится к случаю $N \equiv 0$. Но получаемое при этом из (1) равенство $\int \frac{Y}{Q} dx = -\frac{X}{P}$, согласно

результату, отмеченному в конце параграфа III, возможно лишь при $Y\equiv0$ и, стало быть, также $X\equiv0$, т. е. однородная задача не имеет нетривиальных решений, что и означает обеспеченную однозначную разрешимость интересующей нас неоднородной задачи.

[12] Задача определения полинома-остатка r из условия делимости выражения $N-Pr$ на q, равносильная задаче определения двух целых функций r и N' (соответствующих степеней), удовлетворяющих тождественно соотношению $Pr+N'q=N$, является первым в цепи целого ряда однотипных алгебраических вопросов, затрагиваемых попутно в данном и в последующих параграфах мемуара по ходу развертывания последовательных этапов метода Остроградского и подвергаемых некоторому обобщающему рассмотрению в параграфе IX.

Критерий совместимости и определенности системы линейных уравнений, о котором уже была речь в прим. 8 и 10, в этих задачах применяется с наибольшей простотой. Соответствующая однородная задача и в данном случае, например, имеет место при $N\equiv0$. Поскольку полиномы P и q взаимно простые, то для делимости Pr на q должен был бы делиться на q полином r, степень которого, однако, ниже степени q. Таким образом, условие $N\equiv0$ с необходимостью повлекло бы за собой $r=0$ и $N'\equiv0$. Это и значит, что однородная задача здесь не имеет нетривиальных решений, и, следовательно, доказана однозначная разрешимость интересующей нас неоднородной задачи.

[13] В действительности, в «соображениях, которые были изложены», содержится принадлежащий Остроградскому (см. также цитированный уже нами в прим. 3 более ранний его мемуар) оригинальный метод как раз для разделения множителей различной кратности (ср. следующий параграф VII).

[14] В тексте работы отсутствует обозначение параграфа VI. При публикации работа была разбита на две части, как это указано выше, и параграфом VII начинается вторая часть.

[15] Учитывая, по-видимому, указанное здесь практическое значение своего метода разделения кратных корней, Остроградский возвращается к его изложению в отдельной статье «О равных корнях целых полиномов» (1849 г.). В позднейшей «Заметке о равных множителях целых полиномов» (1856 г.), напечатанной в докладах Парижской Академии наук (см. перевод в настоящем сборнике), Остроградский дает другой весьма оригинальный способ для наиболее прямого выделения совокупности линейных множителей любой кратности.

[16] Здесь Остроградский не сводит определения Y к более расчлененной процедуре последовательного нахождения $r, r_1, \ldots, r_{i-1}$ Y_i; при этом общая схема вычислительного процесса, естественно, выигрывает несколько в смысле сжатости и более легкой обозримости ее изложения. Однако, учитывая возможную целесообразность использования дальнейших приведений в более сложных случаях практики, Остроградский ниже указывает прием,

восстанавливающий в любой желаемой мере бо́льшую расчлененность вычислительной процедуры, определенной в основных чертах в параграфах IV—VI первой части мемуара.

[17] Легко видеть, что полиномы, обозначенные здесь через N_1, N_2 и т. д., отличны от полиномов, обозначавшихся теми же буквами в первой части мемуара.

[18] По смыслу изложения и по прямой связи с конкретными рассмотрениями других параграфов здесь, очевидно, предполагается, кроме того, что полиномы B и A — взаимно простые. Можно вообще заметить, что данный параграф мемуара, имеющий характер методологического отступления и посвященный некоторым дополнительным замечаниям (обобщающего или резюмирующего характера) к соответствующим линейно-алгебраическим рассмотрениям предыдущих параграфов, оформлен местами несколько менее тщательно, заключая несколько мелких, но все же досадных редакционных недосмотров. Что касается вопроса об однозначной разрешимости рассматриваемой здесь алгебраической задачи, то нам и в общем случае не остается ничего добавить к тому, что уже было разъяснено в прим. 11 применительно к первому встретившемуся нам конкретному случаю этого рода.

[19] Эта оценка, естественно, могла относиться к теоретической простоте и изяществу метода, который, не требуя фактически даже составления относящейся к вопросу системы линейных уравнений, сводит все решение данного вопроса к таким классическим процедурам, как евклидов алгоритм последовательных делений и связанное с ним разложение алгебраической дроби в непрерывную, т. е. к тому алгоритму, который в своем прямом назначении (для отыскания общего наибольшего делителя) играет основную роль также и в разделении кратных корней знаменателя дроби $\frac{N}{M}$, составляющем первый этап в предлагаемом Остроградским решении рассматриваемой задачи интегрирования.

Однако в численном примере, разбираемом в конце мемуара, Остроградский при нахождении X и Y вовсе не применяет указанного метода алгебраических непрерывных дробей. По-видимому, он не переоценивал его чисто практического значения для решения вопросов этого рода: здесь он предпочитает применять первый из указанных им трех подходов (деление числителя $Bz+C$ на знаменатель A с приравниванием остатка нулю), комбинируя его с приемом частичного определения искомых коэффициентов на основе критерия Декарта-Безу для делимости полинома (числителя) на $x-\alpha$ (α — корень знаменателя) и некоторого соответствующего сокращения дроби $\frac{Bz+C}{A}$ еще до выделения из нее целой части.

[20] k — численный множитель. В оригинале мемуара множитель, по явному недоразумению, пропущен.

[21] Разумеется, из указанного сопоставления следует только лишь $S_n : P_{n-1} = U_n : Q_{n-1}$ $(=\delta_n)$ при $n = 2, 3, \ldots$ Но если мы для первых двух подходящих дробей ($n = 1, 2$) принимаем канонические представления $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 q_2 + \mu_2}{q_2}$, то $\delta_2 = 1$; затем, определяя канонические представления дальнейших подходящих дробей последовательно добавляемыми условиями $\delta_3 = 1$, $\delta_4 = 1$ и т. д., мы действительно придем к рекуррентным соотношениям (16) при $n = 3, 4, \ldots$ При формальном же добавлении подходящей дроби $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}$ рекуррентные соотношения (16) и рассматриваемые далее в тексте соотношения для y_n оказываются, очевидно, применимыми и при $n = 2$. Из формулы $y_n = (-1)^n \mu_2 \ldots \mu_n$ непосредственно усматривается, между прочим, важный для конечных выводов факт несократимости дробей $\frac{P_n}{Q_n}$.

[22] Предполагается существенным образом, что полиномы A и B — взаимно простые.

[23] Напомним, что через k обозначено общее численное значение двух равных отношений $\frac{\mu_1 A}{P_i}$ и $\frac{B}{Q_i}$.

[24] В этом случае произведение $\mu_1 C Q_{i-1}$ фигурирует уже в соотношении

$$B \frac{(-1)^i \mu_1 C Q_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_i} - A \frac{(-1)^i C P_{i-1}}{k \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_i} = c,$$

получаемом аналогичным образом из разложения $\frac{\mu_1 B}{A}$ в непрерывную дробь.

[25] Как мы видим, автор кладет в основу вычислительной процедуры схему, указанную в параграфе VIII, но в ближайших строках он использует вспомогательные приемы дополнительного расчленения процедуры, подсказываемые фактически первоначальной схемой первой части мемуара (параграф V).

Е. Я. Ремез.

Заметка о равных множителях целых полиномов

Работа была опубликована в «Comptes rendus de l'Académie des sciences» (Paris, 1856, t. 42, стр. 930—931) под заглавием «Note sur les facteurs égaux de polynômes entiers».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Е. Я. Ремеза.

Общеизвестен метод разделения корней различной кратности на основе последовательного применения предложения об общем наибольшем делителе целой рациональной функции и ее производной. Исходные предпосылки для решения этого вопроса были созданы еще в XVII в. исследованиями Ферма, Декарта и — наиболее непосредственным образом — работой Гудде.* О посте-

* T. Hudde. De reductione aequationum. 1657. Опубликовано Ф. ван Скоутеном в виде добавления ко 2-му изданию «Геометрии» Декарта (1659).

пенном же оформлении упомянутого общераспространенного способа можно составить представление путем сравнения трактовки вопроса о кратных корнях, с одной стороны, в «Дифференциальном исчислении» Эйлера,* а с другой стороны, в «Алгебре или исчислении конечных» Н. И. Лобачевского (Казань, 1834) ** и в особенности в «Лекциях алгебр[а]ического и трансцендентного анализа» самого М. В. Остроградского (СПб., 1837).***

В своих мемуарах об интегрировании рациональных дробей 1833 и 1844 гг. Остроградский, попутно затрагивая существенным образом вопрос о разделении кратных корней в знаменателе дроби под знаком $\int \frac{N}{M}\, dx$, выдвинул оригинальный метод для такого разделения, тесно связанный с самой процедурой определения алгебраической части интеграла. В этом методе полиномы q, q_1, $q_2, \ldots$, представляющие соответственно произведение простых, двойных, тройных и т. д. линейных множителей полинома M, находятся непосредственно с помощью функций $Q, R, Q_1, R_1, Q_2, R_2, \ldots$, играющих основную роль в последовательных шагах реализации самого процесса выделения алгебраической части интеграла, по Остроградскому.

В мемуаре 1844 г. (см., в частности, параграф VII перевода в этом сборнике) Остроградский замечает, что заключающийся в его рассуждении попутно формулированный метод разделения кратных корней может и сам по себе представить определенные преимущества перед общеупотребительным в тех случаях, когда степень P высока по сравнению со степенью Q.

В своей статье (1849—1850), на которую Остроградский ссылается в рассматриваемой нами заметке, он лишь резюмировал указанный свой метод предложенный им еще в мемуарах 1833 и 1844 гг., предпослав его изложению еще один вариант, промежуточный по своему характеру между этим методом и общеупотребительным.

Наконец, в последних абзацах данной заметки Остроградский указывает еще один новый и весьма оригинальный метод, в котором произведение q_k линейных множителей любой кратности $k+1$ определяется наиболее прямым путем (независимо от определения $q, q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$) при посредстве одной и той же пары целых функций Q и R.

Е. Я. Ремез.

---

* L. Euler. Institutiones calculi differentialis. St.-Pétersbourg, 1755. См.: Л. Эйлер. Дифференциальное исчисление. Под ред. М. В. Выгодского, Гостехиздат, 1949, стр. 381—385.

** Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, Гостехиздат, 1948, стр. 307—312.

*** См.: Полн. собр. соч. М. В. Остроградского под ред. акад. А. Н. Крылова, т. 2, изд. АН СССР, М.—Л., 1940, стр. 47—57.

Математическая физика

Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне

Работа была доложена 6 ноября 1826 г. на заседании Парижской Академии наук и опубликована в «Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. Sciences math. et phys.» (1832, t. 3, стр. 23—44) под заглавием «Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique».

На русском языке публикуется впервые. Перевод В. И. Антроповой.

Вопросы теории волн составляли большую литературу еще до появления статьи Остроградского, но в этой литературе рассматривался только случай бесконечно глубокой жидкости и при отсутствии боковых стенок; особенно существенным было последнее предположение. В знаменитой работе Герстнера «Neue Wellentheorie» (1804) было дано некоторое точное решение этой задачи без предположения малости волн (так называемые трохоидальные волны Герстнера конечной амплитуды).

Отметим еще исследования Фурье и Пуассона. Фурье в 1815 г. представил Парижской Академии на соискание премии работу, которая затем была опубликована в 1827 г. под заглавием «Théorie de la propagations des ondes a la surface d'une fluide pesant d'une profondeur indefinie».

В 1815 г. Пуассоном была опубликована работа «Memoire sur la théorie des ondes», содержавшая историю вопроса (Ньютон, Лаплас, Лагранж). Автор говорит о том, что его аппарат годится и для жидкости конечной глубины и что в дальнейшем он будет пытаться учесть влияние и вертикальных стенок.

27 октября 1828 г. Пуассон доложил Парижской Академии работу,* в которой решается та же задача, что и у Остроградского, но никакого упоминания о работе последнего там не имеется. В конце есть указание на то, что Корансе (Corancez) представил работу по тому же вопросу, но что он, Пуассон, считает возможным опубликовать свое исследование, так как находит его более простым и более полным. При этом отмечается то, что Корансе не определил из дополнительных условий задачи произвольные элементы, входящие в общее решение.

[1] Под «параллельными осям скоростями u, v, w» здесь понимаются составляющие по осям координат x, y, ζ мгновенной в момент t скорости частицы, находящейся в этот момент в точке с координатами x, y, ζ. Таким образом, u, v, w суть функции x, y, ζ, t, а не только x, y, ζ.

[2] Речь идет об уравнениях движения, выведенных Эйлером для идеальных (без вязкости) несжимаемых жидкостей с постоянной плотностью.

---

* Poisson. Mémoire sur les petites oscillations de l'eau contenue dans un cylindre. Annales de Mathématiques pures et appliquées, t. 19, 1828—1829.

[3] Как и в других своих работах, Остроградский употребляет знак d вместо принятого теперь (после математических работ Якоби 1840-х годов) знака частного дифференциала ∂.

[4] Значение составляющих u, v, w скорости подставляется в уравнение несжимаемости $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=0$.

[5] Иначе говоря, Остроградский переходит к цилиндрическим координатам.

[6] Решение уравнения Лапласа (записанного в цилиндрических координатах)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=0$$

Остроградский ищет здесь методом разделения переменных.

Приводимые им далее дифференциальные уравнения для P, P_n, Q_n получаются подстановкой ряда для φ в только что написанное уравнение Лапласа, в граничные и начальные условия задачи.

[7] Выражение P в интегральном виде здесь, как и выражения P_n и Q_n далее, Остроградский получает из начального условия: при $\zeta=0$, $t=0$ решение φ, отыскиваемое в виде тригонометрического ряда, должно обращаться в заданную функцию $f(\gamma, p)$

$$\varphi|_{t=0,\ \zeta=0}=P(\gamma,\ 0,\ 0)+\sum_{n=1}^{n=\infty}[P_n(\gamma,\ 0,\ 0)\cos np+R_n(\gamma,\ 0,\ 0)\sin np]=f(\gamma,\ p)$$

Отсюда, по формулам Фурье,

$$P(\gamma,\ 0\ 0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\gamma,\ p)\,dp,\qquad P_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\gamma,\ p)\cos np\,dp,$$

$$Q_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\gamma,\ p)\sin np\,dp.$$

[8] Снова автор пользуется методом разделения переменных: его функции T предполагаются состоящими из произведения двух функций, одна из которых зависит от переменной ζ, а другая — от переменной γ.

[9] Таким образом, Остроградский пришел к дифференциальному уравнению цилиндрических функций произвольного целого индекса n, нахождением решения которого он и занимается далее.

Заметим, что комментируемый мемуар был написан в тот период, когда еще не существовало систематической теории цилиндрических функций. Отдельные

свойства этих функций изучались в связи с решением различных (еще не многочисленных) конкретных задач математической физики.

Как известно, цилиндрические функции произвольного целого индекса впервые рассматривались Эйлером в 1764 г. в связи с решением дифференциального уравнения колебаний круглой мембраны. Эйлер нашел представление цилиндрической функции произвольного целого индекса в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням аргумента. Однако он не владел общим приемом определения коэффициентов разложения произвольной функции в ряд по цилиндрическим функциям.

Вскоре после того как Эйлер решил только что указанное уравнение, цилиндрические функции произвольного целого индекса были использованы в астрономии (работы Лагранжа, Карлини), но также без общего определения коэффициентов разложения произвольной функции в ряд по цилиндрическим.

Трудность определения коэффициентов в разложении произвольной функции в ряд по цилиндрическим была впервые преодолена Фурье в связи с разработкой им общего метода разделения переменных в теории теплопроводности. В своей «Аналитической теории тепла» (1822), объединившей ряд его работ, публиковавшихся начиная с 1807 г., Фурье произвел разложение произвольной функции в ряд по цилиндрическим функциям нулевого индекса, полностью определив члены разложения общим методом, получившим впоследствии название метода Фурье.

Почти одновременно с Фурье, пользуясь методом последнего, Лаплас произвел разложение произвольной функции в ряд по цилиндрическим функциям индекса, равного половине нечетного числа (это разложение он получил, занимаясь проблемой теплопроводности в связи с разработкой курса небесной механики).

К 1823 г. относятся работы Пуассона по теплопроводности, в которых, по методу Фурье, произвольная функция разлагается в ряд по цилиндрическим функциям любого целого индекса. Цилиндрическую функцию произвольного целого индекса Пуассон представляет здесь в виде интеграла, впоследствии получившего название интеграла Пуассона.

Наконец, в 1824 г. появляется астрономическая работа Бесселя, в которой цилиндрические функции целого индекса становятся предметом детального изучения. Бессель, как и Пуассон, представляет цилиндрические функции в интегральном виде, но отличном от вида Пуассона (интеграл Бесселя).*

В комментируемом мемуаре Остроградского цилиндрические функции целого индекса находят себе новое приложение: они используются для решения

---

* О развитии теории цилиндрических функций см.: В. В. Гуссов. Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР. Историко-матем. исследования, вып. VI. М., 1953.

краевой задачи гидродинамики. Цилиндрические функции Остроградский представляет здесь с помощью интеграла Пуассона, по-своему оригинально выводя их интегральное выражение.

[10] Остроградский ищет решение уравнения для R в виде обобщенного степенного ряда, как это делают и теперь, причем он считает $T_i = 0$ при $i < 0$, что противоречит сказанному выше ($T_i \neq 0$).

[11] Второе частное решение R_2, входящее в общее решение $R = CR_1 + C'R_2$ уравнения цилиндрических функций произвольного целого индекса в случае, когда частное решение R_1 известно, находится с помощью подстановки $R = R_1 u$, где u — новая неизвестная функция переменной γ. Указанная подстановка приводит к выражению, найденному здесь Остроградским.

[12] Имеется в виду, что выбирают $C' = 0$, так как множитель при C' стремится к ∞ при $\gamma \to 0$.

[13] Не печатается последний параграф работы, содержащий попытку сведения задачи о волнах в цилиндрическом бассейне к задаче о волнах в безграничном полупространстве.

В. И. Антропова.

Заметка по теории теплоты

Работа была доложена 5 ноября 1828 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg», (1831, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 129—138) под заглавием «Note sur la théorie de la chaleur». Перевод В. И. Антроповой.

На русском языке работа была опубликована впервые Б. В. Гнеденко в книге «М. В. Остроградский» (М., 1952). Имеется также перевод А. Г. Свешникова [Успехи матем. наук, т. VIII, вып. 1 (53), М.—Л., 1953].

Эта «Заметка» принадлежит к числу ранних произведений автора. Она была написана во время пребывания Остроградского во Франции. Последнее подтверждается одной из работ Коши, вышедшей в 1841 г.: «Я очень желал бы, — писал Коши, — сравнить найденные мною теоремы с теми, которые получил Остроградский в одном из своих мемуаров, где он установил несколько общих предложений относительно интегрирования линейных уравнений в частных производных. Но, имея плохую память и даже не зная, был ли где-либо напечатан этот мемуар Остроградского, я не имею возможности сделать сравнение».*

Теоремы, о которых говорит Коши, Остроградский получил именно в «Заметке по теории теплоты». Следовательно, рукопись «Заметки», с которой был

---

* A. L. Cauchy. Recherches sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles. Exercices d'analyse et de physique mathématique (1841). Oeuvres complètes, II sér., t. XII, Paris, 1916, стр. 380.

знаком Коши, уже существовала до возвращения Остроградского в Россию (начало 1828 г.).

Комментируемое сочинение, посвященное математической теории теплопроводности, относится к числу наиболее замечательных произведений Остроградского. В связи с разработкой теории теплопроводности в начале XIX в. получает интенсивное развитие метод разделения переменных в области уравнений с частными производными, а в связи с последним развивается и проблема разложения произвольной функции в ряд по собственным функциям некоторого дифференциального уравнения.

Метод разделения переменных в области уравнений с частными производными по существу начал применяться уже в XVIII в. (в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера и др.). Однако тогда этот метод как таковой сформулирован не был, а главное, в XVIII в. осталась неразрешенной в общем виде проблема определения произвольных постоянных ряда, представляющего решение какой-либо задачи, полученное по этому методу.

Идею метода разделения переменных в области дифференциальных уравнений с частными производными впервые вполне отчетливо сформулировал Фурье в своих работах по теории теплопроводности, результаты которых были затем приведены в систему в его «Аналитической теории тепла» (1822). Он первый в общем виде разрешил и проблему определения произвольных постоянных некоторых специальных рядов, полученных методом разделения переменных. Дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье решил для тел специального вида, для которых метод разделения переменных можно было провести не только по отношению ко времени, но и по отношению к координатам.

Вслед за Фурье Лаплас и Пуассон, рассматривая случаи несимметричного распространения теплоты в сфере и цилиндре, указали путь разложения по методу Фурье произвольной функции в ряд по цилиндрическим функциям произвольного индекса, доказав ортогональность последних (Пуассон), а также в ряд по сферическим функциям, ортогональность которых была открыта Лапласом еще до работ Фурье, в связи с проблемами небесной механики (1782).

«Заметка по теории теплоты» Остроградского знаменует собой новый этап в развитии метода Фурье, как и вообще в развитии дифференциальных уравнений с частными производными. В ней Остроградский рассматривает общее уравнение теплопроводности [уравнение (11) «Заметки»], при дополнительных условиях (12) и (13) для тела произвольной формы, и в связи с этим формулирует метод Фурье в наиболее общей форме, мало чем отличающейся от современной.

Подстановка искомого частного решения вида (14) «Заметки»

$$v = e^{-\theta^2 t} \cdot u(x, y, z)$$

(где θ — некоторая постоянная, определяемая из условий задачи) в уравнение теплопроводности (11) привела Остроградского, как говорят теперь,

к краевой задаче на собственные значения — неизбежной спутнице метода Фурье, к нахождению нетривиальных решений уравнения (15)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \theta^2 u = 0$$

при краевом условии (16). Уравнение (15) является снова уравнением с частными производными. Для произвольного тела невозможно провести дальнейшее разделение переменных; можно лишь исследовать общие свойства собственных функций этого уравнения, а затем с помощью этих функций составить решение уравнения теплопроводности при заданных условиях.

Остроградский в своей «Заметке» и занимается выяснением некоторых общих свойств, как мы теперь говорим, собственных функций только что названной задачи. При этом говорит о свойствах собственных функций не только уравнения (15), но и о свойствах решений аналогичных уравнений в других задачах математической физики; уравнение (15) рассматривается как частный случай общего уравнения (5) «Заметки», заданного для тела произвольной формы

$$[f(\alpha, \beta, \gamma) - \theta]\, u = 0,$$

в котором θ — постоянная, $f(\alpha, \beta, \gamma)$ — «целая рациональная функция» своих аргументов, причем α, β и γ обозначают дифференцирование по координатам x, y и z.

Уравнение (5) представляет собой линейное уравнение в частных производных по x, y, z произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Иначе говоря, Остроградский впервые рассматривает, по современной терминологии, некоторую общую задачу на собственные значения. Изучение поставленной задачи для тел произвольной формы привело Остроградского к замечательным открытиям, которые в настоящее время являются одним из краеугольных результатов математического анализа и математической физики.

Формула (1) комментируемого мемуара является знаменитой формулой Остроградского, дающей преобразование тройного интеграла по области в интеграл по поверхности.

Уравнение (7) называется, в современных терминах, сопряженным с уравнением (5) (для случая постоянных коэффициентов).

Основное значение имеет формула

$$(\theta - \theta')\int uu'\,\omega = \int (\cos\lambda . f_1 + \cos\mu . f_2 + \cos\nu . f_3)\, uu's,$$

которая непосредственно связана с формулой Грина, причем Грин рассматривал лишь оператор Лапласа. Из указанной формулы Остроградский и выводит основное свойство ортогональности при $\theta \neq \theta'$ и условии (9) на поверхности.

Подробно рассматривается уравнение теплопроводности (11) при условии (12) на поверхности. При этом v' должна удовлетворять тому же уравнению и тем же предельным условиям. Это дает сразу ортогональность собственных функций при различных собственных значениях и приводит к возможности определения коэффициентов в разложении произвольной функции по фундаментальным функциям задачи [формула (21) комментируемой работы]. В современных обозначениях мы написали бы

$$f(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\int f(x, y, z)\, \varphi_i(x, y, z)\, \omega}{\int \varphi_i^2(x, y, z)\, \omega}\, \varphi_i(x, y, z),$$

где $\varphi_i(x, y, z)$ — собственные функции задачи.

Остроградский не занимается вопросом об условиях, которые надо наложить на функцию $f(x, y, z)$, чтобы написанное разложение было справедливым, и вообще не дает полного оправдания метода Фурье, что было сделано лишь недавно. Не исследован и вопрос о возможности кратных собственных значений. Дана лишь общая схема метода.

Отметим в заключение еще один важный пункт «Заметки», относящийся к исследованию тригонометрического ряда. Отказавшись от доказательства сходимости ряда (21), Остроградский высказал принципиально важную мысль в отношении частного его вида — тригонометрического ряда (22). Представив сумму тригонометрического ряда в виде предела интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a) \sin \dfrac{x-a}{\varepsilon}}{\sin \dfrac{x-a}{2}}\, da$$

при $\varepsilon = \dfrac{2}{2n-1} \to 0$, он обращает внимание в своем сочинении на то, что сходимость тригонометрического ряда зависит лишь от поведения этого интеграла в сколь угодно малой окрестности точки $x = a$. Его идея в настоящее время носит название принципа локализации тригонометрического ряда, создание которого обычно связывается с именем Римана.*

В более развернутом виде принцип локализации тригонометрического ряда изложен Остроградским в его «Курсе небесной механики» (1831 г.), где он отмечает и свой приоритет в этом вопросе.** В современной формулировке принцип

* На то, что идея принципа локализации сформулирована Остроградским задолго до Римана, впервые обратил внимание Б. В. Гнеденко (Б. В. Гнеденко. М. В. Остроградский. М., 1952, стр. 126).

** M. A. Ostrogradsky. Cours de Mécanique céleste. St.-Pétersbourg, 1831, стр. 61—64.

локализации тригонометрического ряда гласит: поведение ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 зависит исключительно от значений, принимаемых функцией в непосредственной близости рассматриваемой точки, т. е. в сколь угодно малой ее окрестности. Современное доказательство принципа основывается на рассмотрении предела того же интеграла, который рассматривался Остроградским.

[1] Под «уравнением в частных разностях» в то время часто понималось уравнение с частными производными.

[2] Вместо знака частного дифференциала ∂ Остроградский, как и в других своих работах, пишет знак d.

[3] Приведенное рассуждение о предельном переходе неправильно. В дальнейшем оно не используется.

[4] Упоминая о трех трансцендентных уравнениях, Остроградский имеет, по-видимому, в виду те конкретные случаи тел, для которых к уравнению (15) может быть применен метод разделения переменных. В настоящей работе Остроградского это, по самому существу дела, не используется. В этом одно из основных значений этой работы.

[5] В конце работы, который нами выпущен, приводятся формулы для задачи распространения тепла в безграничном теле, не имеющие связи с предыдущим материалом.

В. И. Антропова.

Вторая заметка по теории теплоты

Работа была доложена 8 июля 1829 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1831, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 123—126) под заглавием «Deuxiéme note sur la théorie de la chaleur».

На русском языке публикуется впервые. Перевод В. И. Антроповой.

«Вторая заметка по теории теплоты» является продолжением «Заметки по теории теплоты». В ней метод Фурье применяется к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

с неоднородным краевым условием:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\mu+\frac{\partial v}{\partial z}\cos\nu+hv=T\,(x,\ y,\ z,\ t)$$

и начальным условием:

$$v=f\,(x,\ y,\ z)\qquad \text{при } t=0.$$

Комментируемое сочинение было первым, в котором уравнение теплопроводности рассматривалось при таких общих дополнительных условиях. До Остроградского при решении задачи о теплопроводности относительно температуры среды, в которую эти тела помещены, делались простые предположения: Фурье во всех случаях задач считал эту температуру постоянной и равной нулю; Лаплас в задаче о теплопроводности неоднородной сферы * полагал температуру среды зависящей от координат точки пространства, но не зависящей от времени; Пуассон считал температуру среды или равной нулю, или, как в случае линейного распределения тепла в однородном бесконечном бруске,** полагал ее только функцией времени специального вида: $A\sin(\alpha t+\varepsilon)$, где t — время, A, α, ε — постоянные величины.

В связи с этими предположениями краевое условие в работах Фурье в общем случае имело однородный вид

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}+hv=0,$$

на поверхности тела, где $\bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, h — постоянный коэффициент теплоотдачи.

В работах Лапласа и Пуассона случаи неоднородных краевых условий приводили к следующим уравнениям на поверхности твердого тела:

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{n}}+h[v-l(x, y, z)]=0,$$

где $l(x, y, z)$ — температура точки среды;

$$\frac{\partial v}{\partial x}+h[v-\Phi(t)]=0,$$

где $\Phi(t)=A\sin(\alpha t+\varepsilon)$; A, α, ε — постоянные величины.

В комментируемом сочинении Остроградский приводит задачу о теплопроводности для тела произвольной формы с неоднородным краевым условием к случаю задачи с однородным краевым условием, но неоднородным уравнением. Решение получившейся задачи находится в виде

$$\sum\left(X+\int_0^t e^{kr^2t}Zdt\right)e^{-kr^2t},$$

* P. S. L a p l a c e. Traité de Mécanique céleste. Livre XI, Paris, 1825; см. также: Oeuvres complètes, t. V, Paris, 1882.

** S. D. P o i s s o n. Sur la distribution de la chaleur dans un anneau homogène et d'une épaisseur constante, lorsque la température du lieu où il est placé varie d'un point à un autre. Connaissance des tems pour l'an 1826. Paris, 1823, стр. 248—257.

где $X(x, y, z)$ есть слагаемое в ряде Фурье начального условия $f(x, y, z) - F(x, y, z)$ и $Z(x, y, z, t)$ есть слагаемое в ряде Фурье свободного члена $\varphi(x, y, z, t)$.

Таким образом, Остроградский получает решение задачи в виде, совпадающем по существу с тем, который получают в настоящее время применением разложения свободного члена по собственным функциям однородного уравнения с однородным краевым условием. Схема редукции поставленной задачи ничем не отличается от современных схем такого же рода. Однако здесь у Остроградского, как и в первой его «Заметке», отсутствуют обоснования полученных с помощью разложений в ряды результатов, не выясняются условия применимости этих результатов.

[1] Условие выпуклости в дальнейшем не используется.

[2] Как и в других своих сочинениях, вместо знака частного дифференциала ∂ Остроградский всюду пишет знак d. В работе не отмечено, что первое уравнение относится ко всему объему тела, второе должно быть выполнено на поверхности (предельное условие) и третье при $t=0$ (начальное условие).

[3] Буква Y фигурирует в работе Остроградского в разных смыслах. С одной стороны, он пишет уравнение для собственных функций для уравнения

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + r^2 Y = 0$$

при предельном условии

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \cos\lambda + \frac{\partial Y}{\partial y} \cos\mu + \frac{\partial Y}{\partial z} \cos\nu + hY = 0.$$

Пусть $r = r_i$ — собственные значения и $Y_i(x, y, z)$ — соответствующие собственные функции этой задачи. Они зависят только от координат x, y, z. Но в формуле

$$u = \sum Y$$

буква Y уже обозначает упомянутые собственные функции, снабженные коэффициентами, зависящими от t.

Указанная основная формула может быть естественно получена следующим образом. Решение $u(x, y, z, t)$ указанной Остроградским задачи ищется в виде ряда по собственным функциям с коэффициентами, зависящими от t,

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, Y_i(x, y, z).$$

Поскольку все $Y_i(x, y, z)$ удовлетворяют указанному выше предельному условию, то же можно утверждать и для u. Разлагая известную функцию $f(x, y, z) - F(x, y, z)$ по $Y_i(x, y, z)$

$$f(x, y, z) - F(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i Y_i(x, y, z),$$

получаем, в силу начального условия, $a_i(0) = b_i(0)$.

Подставляем выражение для u в дифференциальное уравнение. Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_i}{\partial z^2} = -r_i^2 Y_i,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{da_i(t)}{dt} Y_i(x, y, z) = -k \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 a_i(t) Y_i(x, y, z) + \varphi(x, y, z, t).$$

Разлагая известную функцию $\varphi(x, y, z, t)$ по $Y_i(x, y, z)$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) Y_i(x, y, z),$$

подставляя в предыдущее уравнение и сравнивая коэффициенты при $Y_i(x, y, z)$, получаем

$$\frac{da_i(t)}{dt} + kr_i^2 a_i(t) = c_i(t).$$

Это уравнение, при учете условия $a_i(0) = b_i(0)$, дает

$$a_i(t) = \left(b_i + \int_0^t e^{kr_i^2 t} c_i(t)\, dt \right) e^{-kr_i^2 t}.$$

Подставляя в формулу

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) Y_i(x, y, z),$$

получаем

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \left(b_i Y_i + \int_0^t e^{kr_i^2 t} c_i(t)\, Y_i dt \right) e^{-kr_i^2 t}.$$

В обозначениях Остроградского

$$X = b_i Y_i(x, y, z), \qquad Z = c_i(t) Y_i(x, y, z).$$

Этот вывод Остроградского, подобно предыдущему, носит формальный характер (как это обычно и делалось в то время); не выяснены условия его применимости.

[4] В дальнейшем Остроградский формулирует общую проблему, частными случаями которой являются задачи нахождения X и Z.

[5] В виде корня

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

Остроградский записал здесь выражение

$$\frac{\partial L}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial L}{\partial y}\cos\mu + \frac{\partial L}{\partial z}\cos\nu,$$

т. е. величину производной функции $L(x, y, z)$ по внешней нормали [вспомним, что λ, μ, ν — углы, образованные внешней нормалью с осями координат к поверхности $L(x, y, z) = 0$].

[6] Это следует из того, что на поверхности $L = 0$. Отметим, что при выводе выражения для ψ Остроградский считает, что функция T задана не только на поверхности, но и во всем теле.

В. И. Антропова.

Выдержка из протокола Санкт-Петербургской Академии наук от 23 сентября 1829 г.

Настоящий протокол был напечатан в журнале «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1830, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, 1 livr., стр. I—II).

На русском языке публикуется впервые. Перевод В. И. Антроповой.

Содержание этой заметки Остроградского непосредственно связано с его работой «Об уравнении, относящемся к распространению теплоты внутри жидкости», комментарий к которой помещен ниже.

Об уравнении, относящемся к распространению теплоты внутри жидкости

Работа была доложена 8 апреля 1836 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1836, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 353—357) под заглавием «Sur l'équation relative à la propagation de la chaleur dans l'intérieur des liquides».

На русском языке публикуется впервые. Перевод В. И. Антроповой.

Комментируемый мемуар посвящен выводу уравнения теплопроводности для сжимаемой жидкости. Кроме чисто механической стороны этой работы, она заслуживает внимания и с другой точки зрения, так как здесь впервые проводится вывод дифференциального уравнения математической физики при помощи рассмотрения явления в любом конечном объеме, а не в элементарном параллелепипеде. Такой метод связан с использованием формулы Остроградского, преобразующей объемный интеграл в поверхностный. В работе таким путем выводится формула

$$d(k\theta\omega)=\left[\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}\right]\omega dt.$$

При выводе уравнения распространения тепла Остроградский пользуется понятием теплоемкости k, причем это есть теплоемкость, отнесенная к единице объема. В обычных обозначениях мы будем иметь $k=c\rho$, где c — обычная теплоемкость и ρ — плотность. Для широкого диапазона температур и давлений можно считать c постоянной.

Дальнейшее изложение Остроградский ведет на вариации дифференциалов. Это относится и к утверждению, что, «согласно принципу вариационного исчисления», можно взять $\int d(k\theta\omega)$ вместо $d\int k\theta\omega$, и к формуле

$$d(k\theta\omega)=\left[\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta u)}{dx}+\frac{d(k\theta v)}{dy}+\frac{d(k\theta w)}{dz}\right]\omega dt,$$

которая получается на основе формулы

$$d\omega=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\omega dt,$$

выведенной Пуассоном. В связи с этим изложение страдает некоторой неясностью. Равенство $d\int(k\theta\omega)=\int d(k\theta\omega)$ можно осмыслить, полагая $k=c\rho$ и принимая во внимание неизменность элементарной массы $\rho\omega$.

Окончательная формула для притока тепла за счет повышения температуры за промежуток времени dt

$$d(k\theta\omega)=\left[\frac{d(k\theta)}{dt}+\frac{d(k\theta u)}{dx}+\frac{d(k\theta v)}{dy}+\frac{d(k\theta w)}{dz}\right]\omega dt$$

является правильной. Эта формула, а также и написанная выше формула Пуассона, выраженные в интегральной форме, непосредственно связаны

с известной формулой дифференцирования тройного интеграла по переменной движущейся области. В современных обозначениях эта формула имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(\Omega)} U\,d\omega = \iiint\limits_{(\Omega)} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\left(U\vec{v}\right)\right] d\omega.$$

Остроградский в то время, естественно, не мог дать полного баланса энергии, и окончательное уравнение

$$\frac{d(k\theta)}{dt} + \frac{d(k\theta u)}{dx} + \frac{d(k\theta v)}{dy} + \frac{d(k\theta w)}{dz} = \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(K\frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}$$

не является точным. Отметим, что если считать теплоемкость c постоянной и использовать уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости, то написанное уравнение теплопроводности совпадет с уравнением, указанным Остроградским в 1829 г. (Соответствующая выдержка из протокола конференции Академии наук приведена перед комментируемой работой).

В конце работы дается формула

$$d\omega = (Pd\theta - Qdp)\,\omega,$$

устанавливающая тот факт, что относительное изменение элемента объема $\frac{d\omega}{\omega}$ выражается линейно через $d\theta$ и dp. Коэффициенты P и Q не уточняются. Известно, что для совершенного газа

$$P = \frac{R}{\rho} \text{ и } Q = \frac{1}{p},$$

где R — коэффициент в уравнении Клапейрона $p = R\rho T$. Во всей работе рассматривается идеальная жидкость, т. е. не учитываются силы вязкости.

[1] См.: J. B. Fourier. Mémoire d'analyse sur le mouvement de la chaleur dans les fluides. Lu à l'Académie des sciences, le 4 septembre 1820; Extrait des notes manuscripes conservées par l'auteur. Mém. de l'Acad. des sc. de l'Institut de France, t. XII, Paris, 1833; см. также: Oeuvres complètes, t. II, Paris, 1890.

[2] k — удельная теплоемкость, отнесенная к единице объема жидкости.

[3] В первой публикации комментируемого сочинения вместо 1829 г. был указан 1833 г. — очевидная опечатка: Остроградский здесь ссылается на сочинение Пуассона.*

* S. D. Poisson. Mémoire sur les équations générales de l'Equilibre et du mouvement les corps solides élastiques et des fluides. Lu à l'Académie des sciences, le 12 octobre 1829 (Journ. de l'École Polytéchnique, t. XIII, cahier 20, Paris, 1831).

[4] Уравнение $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, где u, v, w — проекции вектора скорости на оси координат, представляет собой так называемое уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости уравнение непрерывности имеет в современных обозначениях вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

где ρ — плотность жидкости. Если использовать неизменность массы жидкой частицы, то это уравнение непосредственно приводит к уравнению, выведенному Пуассоном. Об этом уравнении мы уже говорили выше.

[5] Неправильность рассуждений Фурье Остроградский, вероятно, видит в том, что Фурье считает $k=c\rho$ величиной постоянной, но при этом учитывает зависимость ρ от температуры.

[6] Дифференциал элементарного объема $\omega=dxdydz$ Остроградский приводит здесь как уже известное выражение:

$$d\omega=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\omega dt.$$

Подробный вывод дифференциала $d\omega$, т. е. главного приращения элементарного объема ω, до Остроградского можно найти, например, в сочинениях Пуассона. Так, в своем «Трактате по механике» Пуассон * доказывает, что если элементарный объем взять в форме прямоугольного параллелепипеда, т. е. положить $\omega=dxdydz$, то по прошествии времени $d\tau$ он превратится в параллелепипед, который — с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка малости — можно считать также прямоугольным. Ребра старого параллелепипеда станут соответственно

$$dx+\frac{\partial u}{\partial x}dxdt, \quad dy+\frac{\partial v}{\partial y}dydt, \quad dz+\frac{\partial w}{\partial z}dzdt,$$

и — с точностью до бесконечно малых высшего порядка — объем нового параллелепипеда будет равен произведению

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt+\frac{\partial v}{\partial y}dt+\frac{\partial w}{\partial z}dt\right)dxdydz.$$

Следовательно, главная часть приращения объема, т. е. $d\omega$, будет равна

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydzdt.$$

* Poisson. Traité de mécanique, Paris. 1833, стр. 669.

[7] Фурье в своей работе указывает на то, что вопрос о распространении тепла рассматривается для несжимаемой жидкости, но не для газов. Наряду с этим считается, что плотность есть линейная функция температуры, и это выражение плотности подставляется в уравнение неразрывности.

В современных обозначениях уравнение распространения тепла Фурье имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} + \theta \operatorname{div} \vec{v} = \frac{K}{c\rho} \Delta\theta$$

(K считается постоянным), и ввиду сказанного выше нельзя считать, что $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Член $\theta \operatorname{div} \vec{v}$ получается в результате того, что произведение $k = c\rho$ при выводе уравнения считается постоянным. У Фурье система уравнений замыкается, т. е. число уравнений равно числу неизвестных функций (составляющие вектора скорости, давление, плотность ρ и температура θ). К трем уравнениям движения и уравнению неразрывности добавляются указанное выше уравнение теплопроводности и уравнение, выражающее линейную зависимость плотности от температуры.

В работе Пуассона мы имеем также замкнутую систему уравнений. Кроме трех уравнений движения и уравнения неразрывности, написанного в обычной форме, вводится уравнение, выражающее тот факт, что относительное изменение объема жидкой частицы пропорционально изменению ее температуры. Это уравнение, с использованием уравнения неразрывности, записывается Пуассоном в виде

$$\operatorname{div} \vec{v} = \eta \frac{d\theta}{dt},$$

где η — положительный коэффициент пропорциональности.

Уравнение теплопроводности записывается в обычной форме

$$c \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\left({}'\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(c'\,\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(c'\,\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

но слева, как это и замечает Остроградский, вместо субстанциональной производной по времени стоит локальная производная. Уравнение теплопроводности Остроградского, если положить (как это естественно делать) $k = c\rho$ (где c — теплоемкость при постоянном объеме и ρ — плотность) и считать c постоянной, принимает, в силу уравнения неразрывности, в современных обозначениях вид:

$$c\rho \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}{\partial z}.$$

Если не учитывать вязкости, что и делает Остроградский, то полный учет всего баланса энергии приводит к уравнению, которое отличается от написанного выше уравнения Остроградского членом $(-Ap\operatorname{div}\vec{v})$ в правой части, где A — термический эквивалент работы. Указанное выше уравнение Остроградского совпадает (если считать c постоянной) с уравнением Пуассона, при замене в нем $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ на $\frac{d\theta}{dt}$, и с уравнением Фурье, если в нем положить $\operatorname{div}\vec{v}=0$ и считать K постоянным.

В. И. Смирнов.

Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругой среды, и об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругих тел

Работа «Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругой среды» была доложена на заседании Академии наук 10 июня 1829 г. и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1831, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 455—461) под заглавием «Sur l'intégration des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations d'un milieu élastique».

Вторая работа «Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругих тел» была зачитана на заседании Академии наук 27 июня 1832 г. и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1833, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 2, стр. 339—371) под заглавием «Mémoire sur l'intégration des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations des corps élastiques».

На русском языке обе работы публикуются впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

Эти работы относятся к одному и тому же периоду научной деятельности Остроградского (они разделены тремя годами) и посвящены одной задаче — задаче о распространении малых колебаний в бесконечной упругой среде. Годы, когда писались работы, были для теории упругости началом нового этапа. После длительного периода, от Галилея и примерно до 1820 г., когда только на частных задачах вырабатывались общие основы механики упругих тел, в работах, приходящихся на третье десятилетие XIX в. (Навье, Коши, Пауссона), были получены общие дифференциальные уравнения равновесия и движения упругих тел.

Таким образом, был создан общий подход к трактовке задач теории упругости. Однако в обосновании этого общего подхода еще многое представлялось

неясным и спорным; достаточно напомнить о полемике между Навье и Пуассоном, приходящейся на то десятилетие, о котором идет речь. Поэтому первоочередной проблемой было применение новых и общих уравнений к отдельным задачам, имеющим определенный и ясный физический смысл и допускающим полное математическое решение. Такой задачей и была та, которой посвящены рассматриваемые работы Остроградского. В них, как и в других своих работах, русский ученый был на первой линии науки своего времени.

Одновременно с Остроградским та же задача, но тоже в два приема, была рассмотрена одним из создателей общих методов теории упругости — Пуассоном. Работы обоих исследователей велись параллельно, и их необходимо сопоставить, чтобы правильно оценить результаты Остроградского. Поэтому мы дадим необходимые сведения об исследованиях Пуассона.

Первая из двух работ Пуассона, которые здесь нас интересуют, это «Дополнение» («Addition») к его большому «Мемуару о равновесии и движении упругих тел». Мемуар этот был доложен Парижской Академии в апреле 1828 г. и хотя содержит общие уравнения механики упругих тел в перемещениях в той форме, в какой они были раньше получены Навье и в которой ими пользуется Остроградский, но непосредственного отношения к задаче о колебаниях бесконечной упругой среды не имеет. «Дополнение» же доложено несколько позже, 24 ноября 1828 г. Помещены эти обе работы в восьмом томе «Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France»,* имеющем на корешке 1825 г., но отпечатанном и увидевшем свет в 1829 г.

Следовательно, Остроградский, доложивший свой первый мемуар 6 июня 1829 г., не мог знать «Дополнения» Пуассона. Но Остроградский не ссылается на эту работу Пуассона и в более позднем своем мемуаре, когда ему была известна и вторая работа Пуассона, посвященная той же задаче. Мы полагаем это неслучайным и связанным с тем, что у Остроградского были все основания считать решение, данное Пуассоном в его «Дополнении», неудачным.

Проследим за ходом выкладки, приводящей Пуассона к его первому решению задачи. Исходными являются те же уравнения для колебаний изотропных упругих твердых тел с одной постоянной, которые обозначены (b) в первом мемуаре Остроградского и (5) — во втором. Вводится в рассмотрение величина $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$ (расходимость вектора смещения, или — по терминологии Пуассона — дилатация), которую Пуассон полагает равной второй производной по времени от некоторой вспомогательной функции координат и времени:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{1}$$

* Мемуар Пуассона — на стр. 357—570, «Дополнение» — на стр. 623—627.

Исходные уравнения запишутся тогда в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^3\varphi}{dxdt^2},\\ \frac{d^2v}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^3\varphi}{dydt^2},\\ \frac{d^2w}{dt^2}&=k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+2k^2\frac{d^3\varphi}{dzdt^2}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Дифференцируя уравнения (2) (первое по x, второе по y, третье по z) и складывая, получаем

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4}=3k^2\left(\frac{d^4\varphi}{dx^2dt^2}+\frac{d^4\varphi}{dy^2dt^2}+\frac{d^4\varphi}{dz^2dt^2}\right),$$

после чего двойное интегрирование по t дает:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=3k^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)+Pt+Q,$$

где P и Q — функции только x, y, z.

Теперь Пуассон полагает

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi'+pt+q, & u&=u'+3k^2\frac{d\varphi'}{dx},\\ v&=v'+3k^2\frac{d\varphi'}{dy}, & w&=w'+3k^2\frac{d\varphi'}{dz},\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

причем φ' должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=3k^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}+\frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right).\tag{4}$$

Для этого необходимо, чтобы p и q (функции только от x, y, z) удовлетворяли уравнениям

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}+P=0,\qquad \frac{d^2q}{dx^2}+\frac{d^2q}{dy^2}+\frac{d^2q}{dz^2}+Q=0,$$

и тогда, как легко видеть, каждое из неизвестных u', v', w' в отдельности должно удовлетворять (волновому) уравнению

$$\frac{d^2u'}{dt^2}=k^2\left(\frac{d^2u'}{dx^2}+\frac{d^2u'}{dy^2}+\frac{d^2u'}{dz^2}\right),\tag{5}$$

. . . .

Вместе с тем, как следует из (1) после подстановки туда новых неизвестных,

$$\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{dz}=0. \qquad (6)$$

Теперь Пуассон сразу пишет общее решение для неизвестных v' и w', используя выведенный им в одной из более ранних работ * общий интеграл волнового уравнения в виде

$$v'=\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1\,(x+kt\cos\alpha,\ y+kt\sin\alpha\sin\beta,$$

$$z+kt\sin\alpha\cos\beta)\,t\sin\alpha\,d\beta d\alpha+\frac{d^2}{dxdt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1\,(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)\,t\sin\alpha\,d\beta\,d\alpha,$$

$$w'=\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2\,(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)\,t\sin\alpha\,d\beta\,d\alpha+$$

$$+\frac{d^2}{dxdt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_2\,(x+kt\cos\alpha,\ldots)\,t\sin\alpha\,d\beta\,d\alpha.$$

Здесь произвольные функции, входящие в выражения для v' и w', обозначены через $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{dF_1}{dx}$, $\frac{df_2}{dx}$, $\frac{dF_2}{dx}$. Аналогичное выражение на основании (4) получаем для φ' (с заменой k на $k\sqrt{3}$). Для u' на основании (6) получается более сложное выражение

$$u'=\omega-\frac{d}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1\,(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)\,t\sin\alpha\,d\beta\,d\alpha-$$

$$-\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2\,(x+kt\cos\alpha,\ \ldots)\,t\sin\alpha\,d\beta\,d\alpha-$$

---

* Poisson. Mémoire sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques. Mémoires de l'Acad. royale des sc. de l'Institut de France, 1820, t. 3, стр. 121—174 (особенно см. стр. 130—134); см. также: А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Изд. 5-е, 1950, § 34.

$$-\frac{d^2}{dydt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1(x+kt\cos\alpha, \ \ldots)\, t\sin\alpha\, d\beta\, d\alpha -$$

$$-\frac{d^2}{dzdt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_2(x+kt\cos\alpha, \ldots)\, t\sin\alpha\, d\beta\, d\alpha,$$

где ω есть произвольная функция y и z. При этих значениях φ', u', v', w' формулы (3) дают общий интеграл исходных уравнений.

Достаточно сопоставить это решение с решением, данным в первом мемуаре Остроградского, чтобы увидеть все преимущества последнего. Формулы Пуассона, в отличие от формул Остроградского, не симметричны относительно величин u, v, w, трудно обозримы, а определение входящих в них произвольных функций по начальным данным для u, v, w представляется затруднительным. Между тем сам Пуассон писал в уже упоминавшемся мемуаре (см. примечание на стр. 503) по поводу решения уравнений в частных производных в виде определенных интегралов: «Особенно надо добиваться в таких интегралах, чтобы они легко позволяли определить входящие в них произвольные функции» («Ce qu'il faut sourtout rechercher dans ces sortes d'intégrales, c'est qu'elles se prêtent facilement à la détermination des fonctions arbitraires qu'elles renferment»).

Всех этих недостатков лишено решение Остроградского, данное в его работе 1829 г. Метод, который был применен Остроградским и который представляет обобщение метода, данного Коши для одного линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, также имеет общее значение, тогда как приемы Пуассона, несмотря на их остроумие, носят весьма частный характер и связаны с введением излишних действий. Добавим, что хотя Пуассон заканчивает свое «Дополнение» обещанием применить к частным случаям полученные им формулы, последние, ввиду их громоздкости, остались неиспользованными. Между тем Остроградский заканчивает свой мемуар применением выведенных им формул: ему удается просто получить выражение для промежутка времени, в течение которого происходят колебания в данной точке упругой среды. В сущности, Остроградский показывает при этом справедливость «принципа Гюйгенса» для рассматриваемого волнового процесса.

Все эти обстоятельства не могли не побудить Пуассона еще раз заняться той же задачей. Это им сделано в работе «Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques», доложенной в октябре 1830 г.* В первой части мемуара рассматривается распространение возмущения в жидкостях; она

---

* Mémoires de l'Acad. royale des sc. de l'Institut de France, 1831, t. 10, стр. 549—605 (на корешке тома — 1827 г.).

не имеет отношения к нашей задаче; вторая же часть (стр. 578—605) целиком ей посвящена.

На этот раз Пуассон исходит из частного решения исходных уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(A\cos\rho\lambda k\sqrt{3}\,t + A'\frac{\sin\rho\lambda k\sqrt{3}\,t}{\rho\lambda k\sqrt{3}}\right)\cos\rho\delta, \\ v &= \left(B\cos\rho\lambda k\sqrt{3}\,t + B'\frac{\sin\rho\lambda k\sqrt{3}\,t}{\rho\lambda k\sqrt{3}}\right)\cos\rho\delta, \\ w &= \left(C\cos\rho\lambda k\sqrt{3}\,t + C'\frac{\sin\rho\lambda k\sqrt{3}\,t}{\rho\lambda k\sqrt{3}}\right)\cos\rho\delta. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Здесь $\delta = \alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma(z-z')$, а $A, A', B, B', C, C', \alpha, \beta, \gamma, \rho, x', y', z'$ — постоянные, из которых последние четыре независимы, а первые девять связаны шестью уравнениями: —

$$3A\lambda^2 = A(3\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2B\alpha\beta + 2C\alpha\gamma,$$

$$3B\lambda^2 = B(\alpha^2+3\beta^2+\gamma^2) + 2C\beta\gamma + 2A\beta\alpha,$$

$$3C\lambda^2 = C(\alpha^2+\beta^2+3\gamma^2) + 2A\gamma\alpha + 2B\gamma\beta$$

и тремя аналогичными уравнениями, получающимися из предыдущих заменой A, B, C соответственно на A', B', C'. Используя последние уравнения, Пуассон несколько упрощает систему произвольных постоянных и получает вместо (7) частные решения в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= \left[A\cos\rho k\sqrt{3}\,t + A'\frac{\sin\rho k\sqrt{3}\,t}{\rho k\sqrt{3}} - \left(\frac{B\beta}{\alpha}+\frac{C\gamma}{\alpha}\right)\cos\rho kt - {}\right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{B'\beta}{\alpha}+\frac{C'\gamma}{\alpha}\right)\frac{\sin\rho kt}{\rho k}\right]\cos\rho\delta, \\ v &= \left[\frac{A\beta}{\alpha}\cos\rho k\sqrt{3}\,t + \frac{A'\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sin\rho k\sqrt{3}\,t}{\rho k\sqrt{3}} + B\cos\rho kt + {}\right. \\ &\qquad \left. + B'\frac{\sin\rho kt}{\rho k}\right]\cos\rho\delta, \\ w &= \left[\frac{A\gamma}{\alpha}\cos\rho k\sqrt{3}\,t + \frac{A'\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\sin\rho k\sqrt{3}\,t}{\rho k\sqrt{3}} + C\cos\rho kt + {}\right. \\ &\qquad \left. + C'\frac{\sin\rho kt}{\rho k}\right]\cos\rho\delta, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

причем теперь $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Затем вместо α, β, γ вводятся новые постоянные θ и ω, что соответствует переходу от декартовых координат к сферическим; величины $A, A', \ldots, C'$

рассматриваются как произвольные непрерывные функции от θ, ω, ρ, x', y', z', и в качестве общего интеграла исходной системы дифференциальных уравнений, на основании ее линейности, предполагаются формулы, получающиеся интегрированием (8) по x', y', z' в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, по ρ — от 0 до $+\infty$, по θ и ω — от 0 соответственно до π и 2π,

$$\left.\begin{aligned} u = \int\int\int\int\int\int \Big[A \cos \rho k \sqrt{3}\, t + A' \frac{\sin \rho k \sqrt{3}\, t}{\rho k \sqrt{3}} - \left(\frac{B\beta}{\alpha} + \frac{C\gamma}{\alpha}\right) \cos \rho k t - \\ - \left(\frac{B'\beta}{\alpha} + \frac{C'\gamma}{\sigma}\right) \frac{\sin \rho k t}{\rho k} \Big] \cos \rho\delta \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\omega dx' dy' dz', \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

. . . .

Формулы (9) дают возможность достаточно просто определить входящие в них произвольные функции. Например, если

$$u\,|_{t=0} = f(x,\ y,\ z), \qquad \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = F(x,\ y,\ z), \qquad v\,|_{t=0} = f'(x,\ y,\ z)$$

. . . . ,

то получаем

$$A - \frac{B\beta}{\alpha} - \frac{C\gamma}{\alpha} = \frac{1}{8\pi^3} f(x',\ y',\ z'), \qquad A' - \frac{B'\beta}{\alpha} - \frac{C'\gamma}{\alpha} = \frac{1}{8\pi^3} F(x,\ y,\ z),$$

$$\frac{A\beta}{\alpha} + B = \frac{1}{8\pi^3} f'(x,\ y,\ z),\ \ldots,$$

откуда легко определяются A, A', ..., C'.

Затем Пуассон, применяя интегральную формулу Фурье, упрощает формулы (9), понизив кратность входящих в них интегралов, и получает окончательный результат в виде, совпадающем с точностью до обозначений с тем, который приведен Остроградским в его втором мемуаре в конце параграфа V.

Выписав свои формулы, Пуассон в примечании на стр. 594 названной работы (1831 г.) отмечает: «После того как был написан этот мемуар, г. Остроградский, из Санкт-Петербургской Академии, сообщил мне другие интегралы уравнений (2), которые он доложил этой Академии» («Depuis que ce mémoire est écrit, M. Ostrogradski, de l'Académie de Saint-Pétersbourg, m'a communiqué d'autres intégrales des équations (2), qu'il a présentés à cette Académie»). Далее Пуассон приводит то решение, которое дано Остроградским в его первой работе.

Сравнивая второе решение Пуассона с решением Остроградского, полученным на год ранее, приходим к выводу, что они примерно равноценны, но способ вывода, примененный Пуассоном, во многом уступает методу Остроградского (если оставаться в рамках требований к математической строгости на уровне их эпохи). Подбор произвольных функций у Пуассона не вполне обусловлен его общей методикой и усложнен, и по ходу дела только окончательная форма ре-

зультата могла убедить читателя в достаточной общности полученного решения. Но во всяком случае новый вид общего интеграла исходной системы дифференциальных уравнений не имел недостатков первого решения Пуассона и был им успешно использован в последних параграфах работы (стр. 595—605) для анализа движения при больших значениях времени или на большом удалении от места первоначального возмущения. Пуассон выявляет, таким образом, наличие двух типов упругих волн, распространяющихся с разными скоростями, причем в волнах одного типа имеет место объемное расширение (волны дилатации), а в волнах другого типа оно отсутствует.

Вторая работа Остроградского является как бы ответом на рассмотренную только что вторую работу Пуассона. Достоинства и применимость новых интегралов Пуассона были налицо, и вот Остроградский показывает, что, следуя в основном методу своей первой работы, он может получить результаты Пуассона более естественным и более общим образом. Собственно, критики методов Пуассона у Остроградского нет, но она сама собою вытекает из сопоставления обеих работ. Кроме того, новым во второй работе Остроградского является рассмотрение тех упрощений, которые вносят наличие потенциала для начальных деформаций или для начального распределения скоростей деформаций (параграфы VI и VII работы), прямое доказательство того, что полученное решение представляет общий интеграл исходной системы уравнений (параграф VIII), а также применение тех разложений по несколько обобщенным Остроградским многочленам Лежандра, которые выведены в параграфе I.

Итак, следует признать, что именно Остроградский дал в своей первой работе не вызывавшее сомнений относительно своей общности и практически применимое решение задачи о распространении колебаний в бесконечной упругой среде. Более важные физические выводы сумел получить Пуассон, исходя из своего второго решения. Затем Остроградский получил и несколько углубил результаты Пуассона тем же методом, что и свои; причем этот метод имеет общее значение для интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Добавим, что результаты Остроградского и Пуассона очевидным образом могут быть использованы, если исходить из ныне принятых уравнений для упругих твердых тел с двумя постоянными (об этом подробнее см. в примечаниях к отдельным местам мемуаров).

Первым продолжателем исследований Остроградского и Пуассона был Бланше (Blanchet), рассматривавший ту же задачу для анизотропной (кристаллической) среды.*

* Достаточно полная характеристика работ Бланше (напечатанных в 1840—1842 гг.) дана в книге: Т о d h u n t e r and P e a r s o n. History of the theory of elasticity, vol. I, 1886, стр. 626—635. О последующих работах см.: Л я в. Математическая теория упругости. Перевод с 4-го англ. изд., 1935, гл. 13.

[1] Уравнения (b) в современной терминологии — это уравнения движения изотропных упругих твердых тел (в перемещениях) с одной упругой постоянной.

Таким образом, Остроградский принимает одноконстантную теорию Навье и Пуассона, тогда как теперь общепринятой является теория Коши, согласно которой упругие свойства изотропных твердых тел характеризуются двумя постоянными. В соответствии с этим уравнения (b) заменяются уравнениями:

$$0=\delta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$0=\delta\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$0=\delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);$$

здесь δ — плотность (однородной) среды, λ и μ — так называемые постоянные Ляме.

Деля на δ и вводя обозначения $\frac{\lambda}{\delta}=l^2$, $\frac{\mu}{\delta}=k^2$, перепишем эти уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}
0&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left[(2k^2+l^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(k^2+l^2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)\right],\\
0&=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\left[(2k^2+l^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+k^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(k^2+l^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)\right],\\
0&=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\left[(2k^2+l^2)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+k^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(k^2+l^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right)\right],
\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{b}')$$

откуда уравнения (b) получаются, если положить $\mu=\lambda$, т. е. $k^2=l^2$.*

* См., например: Л я в. Математическая теория упругости. Введение и гл. 13.

Однако метод решения, излагаемый далее Остроградским, полностью применим и к системе (b′). Те незначительные изменения, которые надо сделать по ходу выкладки и в окончательных результатах, указаны ниже.

[2] T_1, T_2, T_3 следует предполагать такими функциями от λ, μ, ν, α, β, γ, t, что T_1, T_2, T_3, $\frac{dT_1}{dt}$, $\frac{dT_2}{dt}$, $\frac{dT_3}{dt}$ при $t=0$ являются функциями лишь переменных λ, μ, ν; в противном случае формулы (d) не будут иметь места.

[3] Изложенный метод, при котором решение системы (b) имеется в виде интегралов (c) и сводится, таким образом, к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, применим к любой однородной линейной системе уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Он представляет обобщение метода, данного Коши для одного уравнения.*

Метод применим и к неоднородной линейной системе (что Остроградский показывает, между прочим, во втором мемуаре), а следовательно, позволяет учесть и массовые силы.

Заметим еще, что если исходить, вместо системы (b), из системы (b′), приведенной в прим. 1, то в последней системе обыкновенных дифференциальных уравнений надо только заменить множитель $3k^2$ на $2k^2+l^2$, а в предыдущей системе множитель $2k^2$ заменяется выражением k^2+l^2.

[4] Чтобы получить из решения в тексте решение уравнений (b′), приведенных в прим. 1, надо только заменить в величинах p и q, входящих в T_1, T_2, T_3, выражение $\cos k\rho t\sqrt{3}$ на $\cos\sqrt{2k^2+l^2}\rho t$. Поэтому в записи p и q в виде интегралов вместо $\int\limits_t^{t\sqrt{3}}$ появится

$$\int\limits_t^{\frac{\sqrt{2k^2+l^2}}{k}} = \int\limits_t^{\sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\mu}}t},$$

и то же изменение надо внести в запись величины Y, соответственно U, как здесь, так и ниже, в их окончательном выражении.

[5] Последняя формула дана без вывода, так как она была получена в более ранних работах Пуассона в связи с интегрированием волнового уравнения.**

* A. L. Cauchy. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficients constans. Journ. de l'Ecole Polytéchnique, cahier XIX, 1823, стр. 510—589; см. также: А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, § 32.

** См., например: А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях. . ., § 34.

[6] Это замечание Остроградского показывает, что он считал очевидной необходимость наложить известные ограничения на функции $f(x, y, z), \ldots$, дающие начальное распределение деформаций и скоростей деформаций, чтобы полученные результаты были применимы. Уточнение же этих ограничений не входило в круг его научных интересов, что характерно для той эпохи.

[7] Вывод Остроградского о том, что продолжительность движения в данном месте не зависит от первоначального смещения, остается в силе, очевидно, и тогда, когда исходными являются уравнения с двумя упругими постоянными. Несколько изменяется выражение для продолжительности движения: оно начинается при $t = \frac{R_0}{\sqrt{2k^2 + l^2}}$ и заканчивается при $t = \frac{R_1}{k}$. Здесь R_0 — наименьшее, R_1 — наибольшее расстояние от рассматриваемой точки до первоначально возмущенного объема. В целом те соображения, какими заканчивается мемуар, показывают справедливость «принципа Гюйгенса» для рассматриваемого волнового процесса.

[8] Многочлены P непосредственно выражаются через многочлены Лежандра, что указано в тексте ниже. Величина Q определяется формулой

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha r\rho \cos\theta + \alpha^2\rho^2 r^2}},$$

где $\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (это обозначение введено в тексте без пояснения), а θ — угол между векторами с составляющими (a, b, c) и (x, y, z). Из сопоставления Q с производящей функцией для многочленов Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + \alpha^2}} = \sum P_n(z)\,\alpha^n$$

ясно, что многочлены P Остроградского — это $\rho^n r^n P_n(\cos\theta)$, где

$$\cos\theta = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Основной целью дальнейших выкладок этого параграфа является выражение через P величин $\sin(ax + by + cz)$, $\cos(ax + by + cz)$; см. формулы (4) и (3) в конце параграфа. Формула (3) используется в дальнейшем изложении.

[9] При этом надо учесть, что $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial c^2} = 0$ для любого индекса при P, и применить теорему Эйлера об однородных функциях к P_{2i}.

[10] Теперь приоритет в выводе общих уравнений теории упругости (с введением одной постоянной для изотропных твердых тел) признается за Навье. Пуассон получил эти же уравнения другим путем, а способ вывода Навье подверг критике, во многом справедливой. Это дало повод к любопытной дискуссии

между Навье и Пуассоном, с которой можно познакомиться по уже упомянутому сочинению Тотгентера и Пирсона.* Остроградский в этой полемике был, видимо, на стороне Пуассона.

[11] Если для получения системы (6) взять произвольное решение уравнения для ϑ, то функции u, v, w, удовлетворяющие (6), могут не удовлетворять последнему из уравнений (5).

[12] В остальной части мемуара Остроградский не пользуется намеченным приемом. Отметим также, что, вообще говоря, следовало бы считать функции f, f_1, f_2 в системе (6) зависящими также и от t.

Мы не указываем далее те незначительные и очевидные изменения в выкладке и результатах, которые нужно сделать, принимая в качестве исходных уравнения с двумя упругими постоянными.

[13] Функции T, T_1, T_2 переменных a, b, c, x', y', z', t следует предполагать такими, что T, T_1, T_2, $\frac{dT}{dt}$, $\frac{dT_1}{dt}$, $\frac{dT_2}{dt}$ при $t=0$ являются лишь функциями x', y', z' (см. прим. 2).

[14] См. прим. 5.

[15] Так как $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \sigma x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \sigma$.

[16] Имеется в виду второй мемуар Пуассона, упоминавшийся выше.

[17] Эту запись надо понимать как сокращенную, вместо

$$\frac{d}{dx} f(x', y', z') \cos[(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c] +$$
$$+ \frac{d}{dy} f_1(x', y', z') \cos[(x'-x)a + (y'-y)b + (z'-z)c] + \ldots$$

[18] Остроградский применяет здесь свою знаменитую формулу для преобразования объемного интеграла от расходимости некоторого вектора в поверхностный. Впервые она указана и выведена в его работе «Первая заметка по теории теплоты» (1828).

[19] Здесь ссылка на интеграл волнового уравнения в форме, данной Пуассоном.**

[20] См. предыдущее примечание.

[21] Это намерение осталось, видимо, неосуществленным.

И. Б. Погребысский.

---

* Todhunter and Pearson. History of the theory of elasticity, vol. I, §§ 527—534.

** См.: А. Н. Крылов. О некоторых дифференциальных уравнениях. . ., § 34.

Механика

Многочисленные исследования Остроградского по механике (общее их число доходит до 18) можно разбить на три группы:

1) работы по обоснованию и обобщению принципа возможных перемещений (в дальнейшем мы будем пользоваться этим термином в современном его понимании);

2) работы по интегрированию уравнений механики;

3) работы по решению частных задач механики.

В издание избранных трудов естественно включить работы первой и второй групп, так как именно они характеризуют Остроградского как механика с широкими теоретическими взглядами, продолжавшего разработку аналитической механики, созданной Лагранжем.

Исследования Остроградского по принципу возможных перемещений являются непосредственным продолжением того, что сделал в этом вопросе Лагранж; поэтому, чтобы правильно оценить их значение, следует кратко рассмотреть результаты, полученные Лагранжем.

В отделе втором своей «Аналитической механики» Лагранж писал: «Общий закон равновесия машин заключается в том, что силы относятся друг к другу обратно отношению скоростей точек, к которым они приложены, причем скорости должны измеряться по направлению этих сил.

«В этом законе заключается положение, которое обычно называют принципом виртуальных скоростей. Как мы показали в предыдущем отделе,* этот принцип уже давно известен в качестве основного принципа равновесия, в силу чего его можно рассматривать как своего рода аксиому механики.

«Для того чтобы выразить принцип в виде формулы, допустим, что силы P, Q, R, . . ., действующие по определенным направлениям, взаимно друг друга уравновешивают. Представим себе, что из точек, к которым приложены силы, отложены отрезки, равные p, q, r, . . . и расположенные по направлению этих сил; обозначим вообще через dp, dq, dr,. . . вариации, или дифференциалы, этих отрезков, поскольку они могут получиться в результате какого-либо бесконечно малого изменения положения различных точек системы.

«Ясно, что эти дифференциалы выразят величины путей, которые будут пройдены в одно и то же мгновение силами P, Q, R, . . . по своим собственным направлениям, если допустить, что эти силы стремятся удлинить соответственно отрезки p, q, r, . . . Таким образом, дифференциалы dp, dq, dr, . . . будут пропорциональны виртуальным скоростям сил P, Q, R, . . . и, следовательно, могут быть для простоты представлены вместо этих скоростей».**

* Лагранж имеет в виду историческое введение, носящее название «О различных принципах статики».

** Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I. Изд. 2-е, Гос. изд. техн.-теор. лит., М.—Л., 1950, стр. 48—49.

Здесь необходимо отметить, что под виртуальной скоростью, согласно Лагранжу, «следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения».* Под принципом виртуальных скоростей Лагранж понимает то, что сейчас называют принципом возможных перемещений.

Далее Лагранж пишет, что «вообще для равновесия любого числа сил P, Q, R, ..., направленных по линиям p, q, r,... и приложенных к любой системе тел или точек, расположенных любым образом, мы имеем уравнение следующего вида:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0.$$

«Это — общая формула статики для равновесия любой системы сил.

«Мы назовем каждый член этой формулы, например Pdp, *моментом* силы P и примем слово *момент* в том смысле, какой ему придал Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость; тогда приведенная выше общая формула статики гласит: *сумма моментов всех сил равна нулю*.

«При применении этой формулы вся трудность сводится к тому, чтобы определить значение дифференциалов dp, dq, dr,... в соответствии с природой заданной системы».**

Далее Лагранж отмечает, что «если значения дифференциалов dp, dq, dr,.. в функции дифференциалов координат различных тел системы известны, то остается только подставить их в общую формулу

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0$$

и затем удовлетворить этому уравнению независимо от дифференциалов, которые оно содержит

«Таким образом, если рассматриваемая система является совершенно свободной, так что не существует никаких заданных соотношений между координатами различных тел и, следовательно, между их дифференциалами, следует удовлетворить приведенному выше уравнению независимо от дифференциалов и для этого приравнять отдельно нулю суммы всех членов, которые умножаются на каждый из этих дифференциалов. Это даст столько уравнений, сколько имеется переменных координат и, следовательно, сколько их необходимо для определения всех этих переменных и для нахождения с их помощью положения всей системы в состоянии равновесия.

«Но если природа системы такова, что тела при своих движениях подчинены особым условиям, следует сначала эти условия выразить с помощью

* Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I, стр. 39.

** Там же, стр. 51.

аналитических уравнений, которые мы называем *условными уравнениями*, что всегда легко выполнить».*

Лагранж предлагает с помощью условных уравнений исключить в выражениях для dp, dq, dr,. . . столько дифференциалов, сколько возможно, так что оставшиеся дифференциалы будут уже совершенно независимы, что и позволит получить уравнения равновесия путем приравнивания нулю коэффициентов при этих дифференциалах.

Замечая, что такого рода исключение может привести к очень сложным вычислениям, Лагранж рекомендует использовать метод множителей, который приводит его к уравнению

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots = 0, \qquad (1)$$

где λ, μ, ν, . . . — неопределенные величины. Что же касается dL, dM, dN,. . ., то, будучи приравнены нулю, они дадут условные уравнения между дифференциалами координат, причем Лагранж отмечает, что эти уравнения могут и не представлять собой полных дифференциалов, но важно лишь то, чтобы дифференциалы координат входили в них линейно.

Уравнение (1) Лагранж называет общим уравнением равновесия.

Обращаясь к работе Остроградского «Общие соображения относительно моментов сил», следует отметить, что она является значительным расширением идей Лагранжа. Так на нее смотрел и сам автор, писавший в начале своего сочинения: «Со времени опубликования „Аналитической механики“ математики заметили, что принцип виртуальных скоростей еще шире, чем предполагал сам Лагранж. Этот великий математик считал, как и Иван Бернулли, что для равновесия системы необходимо, чтобы полный момент, т. е. сумма моментов всех сил, был равен нулю для всех перемещений, которым может быть подвержена система.

«Между тем математики заметили, что Лагранж требовал слишком многого и что для равновесия достаточно, чтобы полный момент системы не мог принимать положительного значения для всех возможных перемещений, так что если для всех этих перемещений значение момента отрицательно, то равновесие обеспечено. Принцип виртуальных скоростей, представленный в этой форме, приобретает бо́льшую общность, допускает бо́льшее число приложений и обнимает действительно все вопросы, которые можно поставить по отношению к равновесию сил».**

Говоря «математики заметили», Остроградский, вероятно, имеет в виду Фурье,*** который высказал мысль о распространении метода возможных пере-

---

* Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I, стр. 60—61.

** См. стр. 205—206 настоящего сборника.

*** Fourier. Mémoire sur la statique, démonstration nouvelle du principe des vitesses virtuelles. Oeuvres de Fourier, t. II, стр. 477.

мещений на системы с неудерживающими связями, выражаемыми неравенствами при условии, что полный момент сил (т. е. работа) был бы либо равен нулю, либо отрицателен.

В рассматриваемой работе Остроградский, так же как и Лагранж, начинает анализ с выражения для полного момента сил, т. е. работы по современной терминологии, но при этом требует, чтобы этот момент не был положителен ни при каком возможном перемещении, т. е. требует выполнения условия

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots \leqslant 0.$$

Что касается условных уравнений, то относительно них он говорит, что «величины dL, dM, . . . будут равны нулю для одних возможных перемещений и не будут равны нулю для других; но ни одна из них не может изменить знака, если только мы не переходим от возможных перемещений к таким, которые не являются возможными».*

Условие, что dL, dM, dN,. . . не равны нулю, выражает то обстоятельство, что вводимые связи являются односторонними, или неудерживающими; случай, когда указанные величины равны нулю, соответствует связям двусторонним, или удерживающим.

Дальнейший способ решения задачи весьма своеобразен и заключается в том, что вместо дифференциалов координат точек системы, через которые линейно выражаются величины dp, dq, ..., вводятся в таком же числе новые переменные

$$d\xi,\ d\eta,\ d\zeta,\ \ldots,\ dL,\ dM,\ dN,\ \ldots,$$

так что выражение для полного момента приобретает вид

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = Ad\xi + Bd\eta + Cd\zeta + \ldots - \lambda dL - \mu dM - \ldots \leqslant 0. \quad (2)$$

Дифференциалы $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, . . . могут быть приняты за независимые, и потому из (2) следует, что

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0 \text{ и т. д.}$$

На основании изложенного формула (2) приобретает вид

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = -(\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots). \quad (3)$$

Так как на всех возможных перемещениях dL, dM, dN,. . . не меняют знаков, то правая часть написанной формулы может быть отрицательной только в том случае, если λ, μ, ν, . . . имеют знаки, соответственно одинаковые со знаками dL, dM, dN,. . . Уравнение (3) совпадает с общим уравнением равновесия Лагранжа.

---

* См. стр. 207.

Заслугой Остроградского является то, что он показал применимость этого уравнения в случае неудерживающих связей при условии, что множители λ, μ, ν, ... имеют те же знаки, что и dL, dM, dN,...

Из формулы (3) легко получить уравнения равновесия в первой форме Лагранжа.

Следует отметить, что в первой части рассматриваемой работы Остроградский, так же как первоначально делает это и Лагранж, отмечает возможные перемещения символом d.

Во второй части работы, рассматривая движение системы, он, используя принцип Даламбера, пишет

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\delta x_\nu + \frac{d^2y_\nu}{dt^2}\delta y_\nu + \frac{d^2z_\nu}{dt^2}\delta z_\nu\right) =$$

$$= P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \nu\delta N + \ldots, \tag{4}$$

где слева стоят ускорения $\frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д., а символ δ относится к возможным перемещениям.

Остроградский особо отмечает, что при наличии неудерживающих связей «знаки λ, μ, ... известны наперед, ибо они должны быть соответственно те же, что и знаки функций δL, δM, ..., отнесенных к возможным перемещениям».*

Если величины δL, δM, δN и т. д. даны при помощи формул типа

$$\delta L = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{1\nu}\delta x_\nu + b_{1\nu}\delta y_\nu + c_{1\nu}\delta z_\nu),$$

$$\delta M = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{2\nu}\delta x_\nu + b_{2\nu}\delta y_\nu + c_{2\nu}\delta z_\nu) \text{ и т. д.,}$$

то, замечая, что работа приложенных сил будет

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = \sum_{\nu=1}^{n} (X_\nu\delta x_\nu + Y_\nu\delta y_\nu + Z_\nu\delta z_\nu),$$

получим из формулы (4) систему $3n$ дифференциальных уравнений движения

$$\left.\begin{aligned} X_\nu - m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} + \lambda a_{1\nu} + \mu a_{2\nu} + \ldots = 0, \\ Y_\nu - m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} + \lambda b_{1\nu} + \mu b_{2\nu} + \ldots = 0, \\ Z_\nu - m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} + \lambda c_{1\nu} + \mu c_{2\nu} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

* См. стр. 222.

К этим уравнениям следует присоединить еще уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \sum_{\nu=1}^{n} (a_{1\nu}\delta x_\nu + b_{1\nu}\delta y_\nu + c_{1\nu}\delta z_\nu) = 0, \\ &\mu \sum_{\nu=1}^{n} (a_{2\nu}\delta x_\nu + b_{2\nu}\delta y_\nu + c_{2\nu}\delta z_\nu) = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Если число связей равно k, то написанной системы $3n+k$ дифференциальных уравнений достаточно для определения движения системы, т. е. определения $3n$ координат и k множителей λ, μ, ...

Уравнения (5) относятся к действительным перемещениям и показывают, что точки не покидают связей и что, следовательно, связи развивают реакции, которым соответствуют множители λ, μ, ν, ... и т. д., сохраняющие все время одни и те же знаки ввиду односторонности связей. Если окажется, что какой-нибудь из множителей λ, μ, ν, ... для момента $t=\tau$ обратится в нуль и для следующих моментов будет иметь знак, противоположный первоначальному, то это будет указывать на то, что связь, соответствующая этому множителю, не будет более стеснять движения системы, которое станет другим.

Перемещения, соответствующие этому движению, не будут удовлетворять тому из уравнений (6), для которого его множитель изменил знак. Вот почему Остроградский и отмечает, что «если один или несколько из множителей λ, μ, ν, .. получают знаки, обратные тем, какие они должны иметь для равновесия движущих и динамических сил, то некоторые из уравнений $dL=0$, $dM=0$ и т. д. не будут удовлетворяться. Это будут те уравнения, которым соответствуют множители λ, μ, ..., изменяющие свой знак.*

Для того чтобы определить движение, начиная с момента при оставшихся связях, нужно исходить снова из системы уравнений (5), причем здесь мы должны опустить те члены, которые содержат множители, изменившие знак. Точно так же из системы уравнений (6) нужно изъять уравнения, соответствующие указанным множителям.

Таким образом, Остроградским до конца была разрешена задача об обобщении принципа возможных перемещений на случай неудерживающих связей.

Интересно отметить, что и Лагранж, и М. В. Остроградский, рассматривая принцип возможных перемещений, нигде не вводят понятия об идеальных связях, как это делается сейчас, а непосредственно пишут выражение

$$\delta A = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots \leqslant 0$$

при условных уравнениях

$$\delta L \geqslant 0,\ \delta M \geqslant 0 \text{ и т. д.},$$

* См. стр. 223.

что приводит их к уравнению

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots + \lambda\delta L + \mu\delta M + \ldots = 0.$$

Относительно членов $\lambda\delta L$, $\mu\delta M$,. . . Лагранж замечает, что их можно рассматривать как моменты некоторых сил λ, μ, . . . , и пишет: «Отсюда следует, что каждое условное уравнение эквивалентно одной или нескольким силам, приложенным к системе по заданным направлениям или вообще стремящимся вызвать изменение значений заданных функций; таким образом, состояние равновесия системы остается одним и тем же, будем ли мы принимать в расчет эти силы, или же мы будем рассматривать условные уравнения».*

«Собственно говоря, рассматриваемые силы заменяют сопротивления, которые могут испытывать тела вследствие взаимной их связи или же вследствие наличия препятствий, которые, в силу природы системы, могут противодействовать их движению; больше того, эти силы представляют собой не что иное, как самые силы этих сопротивлений, которые должны быть равны и направлены прямо противоположно силам давления, развиваемым телами. Как видим, наш метод дает средство для определения этих сил и сопротивлений».**

Как мы уже указывали, Лагранж считал, что принцип «виртуальных скоростей», в его терминологии, «можно рассматривать как своего рода аксиому механики». С этой точки зрения он не нуждается в доказательстве, и законность его можно обосновать, показав, что он оправдывается в весьма большом числе частных случаев; при таком положении мы приходим к естественному выводу, что он справедлив и вообще.

Силы реакций, которые мы можем определить из уравнений Лагранжа 1-го рода, обладают тем свойством, что сумма работ этих реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю в случае удерживающих связей и представляет собой положительную величину в случае неудерживающих связей. Именно это свойство реакций и легло в основу определения так называемых идеальных связей, или связей без трения.

Если с самого начала исходить из предположения, что на систему наложены идеальные связи, то принцип возможных перемещений, собственно, перестает быть принципом и становится теоремой, которая легко доказывается, исходя из основного уравнения статики, записанного для точки, принадлежащей какой-либо системе в виде

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = 0,$$

где $\vec{F}_i$ — равнодействующая активных сил, приложенных к этой точке, $\vec{N}_i$ — равнодействующая реакций связей, наложенных на эту точку.

Следующими работами Остроградского, посвященными принципу возможных перемещений, являются работы: «О мгновенных перемещениях систем,

* Ж. Лагранж. Аналитическая механика, т. I, стр. 110.

** Там же, стр. 111.

подчиненных переменным условиям» и «О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции».

Обе эти работы посвящены вопросу о строгом доказательстве справедливости обычной формулы, выражающей принцип возможных перемещений для стационарных связей в случае связей нестационарных. Остроградский писал: «Занимаясь в прошлом году подготовкой к печати курса механики, я имел случай вновь продумать выводы общих уравнений динамики; я пришел к заключению, что известный в настоящее время метод для составления этих уравнений в случае системы, подчиненной связям, изменяющимся в зависимости от времени, оставляет желать многого в смысле ясности и точности; можно даже усомниться в правильности результатов, к которым он приводит».*

Существенно отметить, что возможными перемещениями Остроградский называет такие, которые удовлетворяют условиям вида

$$adx + bdy + cdz + a'dx' + b'dy' + c'dz' + \ldots + Tdt \geqslant 0,$$

или в современной записи

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu}dx_\nu + b_{\mu\nu}dy_\nu + c_{\mu\nu}dz_\nu) + T_\mu dt \geqslant 0 \ (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m),$$

где m — число связей.

Эти же условия можно записать еще и так:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{A}_{\mu\nu} d\vec{r}_\nu + T_\mu dt \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} dr_\nu \cos\theta_{\mu\nu} + T_\mu dt \geqslant 0,$$

где $\vec{A}_{\mu\nu}$ — вектор с проекциями $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$; $d\vec{r}_\nu$ — перемещение с проекциями dx_ν, dy_ν, dz_ν; $\theta_{\mu\nu}$ — угол между векторами $\vec{A}_{\mu\nu}$ и $d\vec{r}_\nu$.

Действительное перемещение должно, по Остроградскому, заключаться среди возможных и должно удовлетворять условию

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{A}_{\mu\nu} \vec{V}_\nu + T_\mu \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_{\mu\nu} V_\nu \cos\omega_{\mu\nu} + T_\mu \geqslant 0, \tag{7}$$

где $\vec{V}_\nu$ — скорость действительного движения.

Далее Остроградский считает, что перемещения $\delta\vec{r}_\nu$, которые, по его выражению, «способны произвести потерянные силы», комбинируясь с перемещениями $\vec{V}_\nu dt$, получаемыми системой в действительности, приводят к невозможным перемещениям. Условием, гарантирующим это обстоятельство, является

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu \leqslant 0,$$

* См. стр. 230.

причем для комбинированных перемещений $\vec{V}_\nu dt + \delta\vec{r}_\nu$ выполняется неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{A}_{\mu\nu}(\vec{V}_\nu dt + \delta\vec{r}_\nu) + T_\mu dt \geqslant 0.$$

Отсюда, в силу неравенства (7), имеем

$$\delta L_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{A}_{\mu\nu} \cdot \delta\vec{r}_\nu \geqslant 0.$$

Иначе говоря, должно выполняться известное условие равновесия

$$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu \cdot \delta\vec{r}_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu \delta L_\mu = 0,$$

причем все λ_μ должны иметь знак, одинаковый с δL_μ.

В статье «О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции» Остроградский для установления условия

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial L_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu + \frac{\partial L_\mu}{\partial y_\nu}\delta y_\nu + \frac{\partial L_\mu}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right) = 0 \qquad (8)$$

при связях

$$L_\mu(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n) \geqslant 0$$

предлагает рассматривать как возможные перемещения только те, которые, комбинируясь с действительными, дают перемещения, не нарушающие условных уравнений (т. е. удовлетворяют уравнениям связей).

Иначе говоря, имеют место уравнения:

$$L_\mu\Big(x_1 + dx_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2x_1}{dt^2}dt^2 + \delta x_1, \quad y_1 + dy_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2y_1}{dt^2}dt^2 + \delta y_1,$$
$$z_1 + dz_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2z_1}{dt^2}dt^2 + \delta z_1, \quad t + dt, \ldots) = 0,$$

откуда, как следствие, и получается условие (8). Таким образом, определение возможных перемещений, приведенное в первой статье, не совпадает с определением, которое дается во второй статье. Возможные перемещения во второй статье совпадают с перемещениями, которые в первой статье называются перемещениями, вызываемыми потерянными силами.

Определение, даваемое во второй статье, отвечает современным воззрениям на возможные перемещения. Принимая это определение, можно, следуя Остроградскому, доказать, что и в случае нестационарных связей возможные перемещения удовлетворяют условиям того же вида, что и в случае стационар-

ных связей, т. е. условиям (8). Именно доказательство этого положения и являлось целью Остроградского, который считал, что непосредственное получение формулы

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu}\delta x_\nu + b_{\mu\nu}\delta y_\nu + c_{\mu\nu}\delta z_\nu) \geqslant 0$$

из формулы

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu}dx_\nu + b_{\mu\nu}dy_\nu + c_{\mu\nu}dz_\nu) + T_\mu dt \geqslant 0$$

путем отбрасывания члена $T_\mu dt$ является нестрогим и неубедительным.

Интересно отметить, что в курсе «Аналитической механики» Г. К. Суслова для возможных перемещений принято то же определение, что и в первой статье Остроградского, т. е. определение, согласно которому возможные перемещения удовлетворяют условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_{\mu\nu} d\bar{r}_\nu + T_\mu dt \geqslant 0.$$

Разность двух возможных перемещений, совершающихся за один и тот же промежуток времени, называется, по Суслову, виртуальным перемещением и обозначается через $\delta\bar{r}_\nu$.

Переходим теперь к рассмотрению работ Остроградского по интегрированию уравнений механики. Сюда относятся: «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» и «Об интегралах общих уравнений динамики». Вопросы, рассмотренные в указанных работах, также имеют свою историю.

Первый шаг в преобразовании дифференциальных уравнений механики после первого издания «Аналитической механики» Лагранжа сделал Пуассон * в статье о методе вариации постоянных, на которую ссылается Остроградский. В этой работе Пуассон, имея в виду привести систему n уравнений Лагранжа второго рода к системе $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений, вводит вместо переменных q_i, $\dot{q}_i$ новые переменные q_i, p_i, где

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k) \tag{9}$$

представляет собой линейную функцию от всех $\dot{q}_i$.

Разрешив систему (9) относительно $\dot{q}_i$, он получает, что обобщенные скорости будут представлять собой линейную функцию от p, которая к тому же

---

* P o i s s o n. Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique. Journ. de l'Ecole Polytéchnique, 1809, стр. 15.

будет являться и функцией координат q. Обозначая эту функцию через K и используя уравнения Лагранжа второго рода в виде

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial q_i}=P_i(t,\ q,\ p),$$

где U — силовая функция, Пуассон получает систему $2k$ дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt}&=K_i(t,\ q,\ p),\\ \frac{dp_i}{dt}&=P_i(t,\ q,\ p).\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

В результате исследования последней системы он показывает, что если функции $\varphi(t,\ q,\ p)=a$, $\psi(t,q,p)=b$ будут первыми интегралами системы (10), то функция

$$(\varphi,\ \psi)\equiv\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)=c\qquad(11)$$

будет также интегралом этой системы.

Пуассон не заметил, что функции $\dot q_i$ и $\dot p_i$ могут быть представлены как частные производные от некоторой функции $H(t,\ q,\ p)$, что было сделано Гамильтоном. Свою работу Гамильтон * начинает с обобщения принципа наименьшего действия Лагранжа. Предполагая, так же как и Лагранж, что при движении системы имеет место интеграл энергии

$$T=U+H,$$

и подвергая варьированию величину H, не зависящую от времени, он пишет

$$\delta T=\delta U+\delta H.$$

Так как

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(\dot x_\nu^2+\dot y_\nu^2+\dot z_\nu^2\right),$$

$$m_\nu\ddot x_\nu=\frac{\partial U}{\partial x_\nu},\quad m_\nu\ddot y_\nu=\frac{\partial U}{\partial y_\nu},\quad m_\nu\ddot z_\nu=\frac{\partial U}{\partial z_\nu},$$

то формула для δT примет вид

$$\delta T=\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(\ddot x_\nu\delta x_\nu+\ddot y_\nu\delta y_\nu+\ddot z_\nu\delta z_\nu\right)+\delta H.$$

---

* Hamilton. On a general method in dynamics. Transactions of the royal society, 1834—1835.

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, при учете равенства

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_0^t (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu)\, dt = \Big|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_0^t (\dot{x}_\nu \delta \dot{x}_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta \dot{z}_\nu)\, dt = \Big|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) - \delta T,$$

получим

$$\delta V \equiv \int_0^t 2T dt = \Big|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) + t\delta H\,. \tag{12}$$

Эту формулу Гамильтон называет законом переменного действия, а функцию V — характеристической функцией. Вводя далее новую функцию

$$S = V - Ht,$$

Гамильтон получает

$$\delta S = \delta \int_0^t (T + U)\, dt = \Big|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) \tag{13}$$

и доказывает, что S, являющаяся функцией от t, x_ν, $x_{\nu 0}$, обладает тем свойством, что

$$\frac{\partial S}{\partial x_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu, \quad \frac{\partial S}{\partial y_\nu} = m_\nu \dot{y}_\nu, \quad \frac{\partial S}{\partial z_\nu} = m_\nu \dot{z}_\nu,$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{\nu 0}} = -m_\nu \dot{x}_{\nu 0}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_{\nu 0}} = -m_\nu \dot{y}_{\nu 0}, \quad \frac{\partial S}{\partial z_{\nu 0}} = -m_\nu \dot{z}_{\nu 0},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

и удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2m_\nu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_\nu} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_\nu} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_\nu} \right)^2 \right] = U. \tag{14}$$

При переходе к системе независимых параметров q_1, q_2, $q_3, \ldots$ Гамильтон первоначально устанавливает систему канонических уравнений и затем снова возвращается к анализу функции S. Приведем вывод Гамильтона. Гамильтон предполагает, что кинетическая энергия T есть однородная квадратичная

форма обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и что существует силовая функция U. Тогда имеют место формулы

$$2T = \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

$$2\delta T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i \delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

С другой стороны,

$$\delta T = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

откуда, путем вычитания одной формулы из другой, получаем

$$\delta T = \sum_{i=1}^{k} \left(\dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right), \tag{15}$$

где

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

Пусть

$$T = \tilde{T}(p_1, p_2, \ldots, p_k;\ q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

тогда

$$\delta \tilde{T} = \sum_{i} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_i} \delta p_i \right), \tag{16}$$

и, сравнивая формулы (15) и (16), получаем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i}.$$

На основании изложенного уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

можно придать вид

$$\dot{p}_i = \frac{\partial (U - \tilde{T})}{\partial q_i}.$$

Вводя функцию

$$H = \tilde{T} - U,$$

получим

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{17}$$

Установив, таким образом, систему канонических уравнений механики и используя их, Гамильтон пишет

$$S=\int_0^t (T+U)\,dt=\int_0^t \left(\sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)dt;$$

он получает, что

$$\delta S=\sum_{i=1}^k (p_i\delta q_i - p_{i0}\delta q_{i0})$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_{i0}}=-p_{i0}.$$

Далее он показывает, что

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H$$

и что функция S удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tilde{T}\left(q_1, q_2, \ldots, q_k; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right)=U(q_1, q_2, \ldots, q_k), \tag{18}$$

где

$$\tilde{T}=U+H.$$

Функцию S Гамильтон назвал главной функцией.

Если найден полный интеграл уравнения (18), т. е. известна функция

$$S(q_1, q_2, \ldots, q_k; q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{k0})+a_0,$$

тождественно удовлетворяющая этому уравнению, то, найдя производные $\frac{\partial S}{\partial q_{i0}}$ и задавшись начальными импульсами, мы получим систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial q_{i0}}=-p_{i0},$$

из которой можно будет найти координаты $q_1, q_2, \ldots, q_k$ в функции времени и $2k$ произвольных постоянных. Система формул

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{19}$$

позволит тогда определить импульсы p_i как функции тех же величин.

Гамильтон не исследовал вопроса о том, являются ли найденные вышеуказанным способом функции p_i, q_i решениями канонической системы уравнений (17). В 1837 г. Якоби* разрешил аналогичную задачу для случая

* Jacobi. Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen. Journ für die reine und ang. Mathem., Bd. XVII, 1837.

свободной системы точек, рассматривая ее в декартовых координатах и предполагая для общности, что силовая функция U может явно содержать время, и, следовательно, интеграл энергии не имеет места.

Рассмотрим кратко эту работу, так как Остроградский на нее ссылается. Якоби начинает с установления формулы, выражающей закон переменного действия Гамильтона, исходя при этом из уравнений Лагранжа первого рода, т. е. рассматривая несвободную систему. Силы, действующие на точки системы, предполагаются потенциальными, а связи — интегрируемыми. Так как в результате интегрирования уравнений движения координаты точек системы будут представлять собой функции времени и некоторых произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то, умножая уравнения Лагранжа на $\frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}$, $\frac{\partial y_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}$, $\frac{\partial z_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}$, Якоби получает

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left[\ddot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \ddot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \ddot{z}_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}\right] = \frac{\partial U}{\partial \alpha_\varkappa},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{z}_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_\varkappa} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\dot{x}_\nu^2 + \dot{y}_\nu^2 + \dot{z}_\nu^2\right) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_\varkappa}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial (U+T)}{\partial \alpha_\varkappa} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{z}_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}\right).$$

Интегрирование этого выражения дает

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\varkappa} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\varkappa} \int_0^t (U+T)\,dt = \Bigg|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial \alpha_\varkappa} + \dot{z}_\nu \frac{\partial z_\nu}{\partial \alpha_\varkappa}\right).$$

Умножая обе части полученного выражения на $d\alpha_\varkappa$, суммируя по $\varkappa$ и отмечая полный дифференциал при неизменном t буквой δ, Якоби получает

$$\delta S = \delta \int_0^t (U+T)\,dt = \Bigg|_0^t \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu). \qquad (20)$$

Таким образом, здесь возможные перемещения при движущейся системе рассматриваются как происходящие от перехода данного движения к другому, весьма близкому движению той же системы, происходящему от изменения произвольных постоянных в интегралах уравнений динамики. Следует отметить, что мысль о таком рассмотрении возможных перемещений принад-

лежит Остроградскому, который изложил ее в небольшой «Заметке об изменении произвольных постоянных в задачах механики» (1829) и затем развил в своем «Курсе небесной механики» (1831).

Полученная формула для δS совпадает с основной формулой (13) Гамильтона, но она получена без каких бы то ни было предположений относительно стационарности связей и, следовательно, существования интеграла энергии, что является обобщением принципа Гамильтона. Исходя из этого принципа, Якоби получает формулу

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial S}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial S}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)=T+U. \tag{21}$$

Для случая свободной системы

$$m\dot{x}_\nu=\frac{\partial S}{\partial x_\nu},\quad m\dot{y}_\nu=\frac{\partial S}{\partial y_\nu},\quad m\dot{z}_\nu=\frac{\partial S}{\partial z_\nu},$$

и для функции S получается уравнение (14). Дополняя работу Гамильтона, Якоби показал, что любой полный интеграл этого уравнения позволяет найти без интегрирования решения дифференциальных уравнений механики.

Доказательство Якоби состоит в следующем. Пусть дан полный интеграл уравнения (14), т. е. найдена функция

$$S\,(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{3n})+\alpha_{n+1},$$

удовлетворяющая этому уравнению. Тогда можно написать

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}=\beta_i,$$

где β_i — произвольная постоянная. Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_i}\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial t}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)=0.$$

С другой стороны, из основного уравнения следует, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial t}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_\nu}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial y_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_\nu}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i\partial z_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_\nu}\right)=0.$$

Из сравнения полученных формул вытекают равенства

$$\dot{x}_\nu=\frac{1}{m_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_\nu},\quad \dot{y}_\nu=\frac{1}{m_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial y_\nu},\quad \dot{z}_\nu=\frac{1}{m_\nu}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_\nu},$$

дифференцирование которых по времени дает

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2m_\nu} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_\nu}\right)^2 \right].^{*}$$

Правая часть этого выражения, как видно из основного уравнения, есть $\frac{\partial U}{\partial x_\nu}$, и, следовательно,

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = \frac{\partial U}{\partial x_\nu}.$$

Таким образом, координаты, входящие в функцию $S(t, x_1, x_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2 \ldots)$, представляют собой решения дифференциальных уравнений механики.

Работа Остроградского «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» является дальнейшим обобщением вышеуказанной работы Пуассона, в которой для упрощения всех выводов используется система канонических уравнений.

Первоначально Остроградский устанавливает каноническую систему уравнений и показывает, как, используя ее, можно значительно проще, чем это делал Пуассон, получить свойства ее интегралов, выражаемые при помощи скобок Пуассона.

Затем он исследует случай, ранее никем не рассмотренный, когда, кроме сил, имеющих потенциал, на точки действуют силы, работа которых выражается в виде

$$\sum_{i=1}^{k} (X_i \delta x_i + P_i \delta p_i), \tag{22}$$

и каноническая система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + P_i, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} - X_i. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Остроградский показывает, что в этом случае будут иметь место формулы

$$\sum_{\varkappa=1}^{2k} (\varphi_m, \varphi_\varkappa) A_\varkappa = \frac{da_m}{dt}, \tag{24}$$

* Аналогично получаются выражения для $\ddot{y}_\nu$ и $\ddot{z}_\nu$.

где

$$A_\varkappa = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{dx_i}{da_\varkappa} + P_i \frac{dp_i}{da_\varkappa} \right)$$

и вместо x_i и p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ введены новые функции времени

$$\varphi_m (t, x_1, x_2, \ldots, x_k; p_1, p_2, \ldots, p_k) = a_m(t),$$

где $m = 1, 2, \ldots, 2k$.

В работе «Об интегралах общих уравнений динамики» Остроградский показывает, что «теории, установленные Гамильтоном и знаменитым математиком Якоби для систем, которые заданы уравнениями, не изменяющимися в зависимости от времени, распространяются и на системы, определенные как уравнениями, так и неравенствами, которые изменяются в каждый момент».*

Остроградский, в отличие от Гамильтона, не связывает себя с самого начала интегралом энергии, а получает систему канонических уравнений из системы лагранжевых уравнений

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

где то, что теперь принято обозначать через $L = T + U$ и q_i, Остроградский обозначает через V и ξ_i. Представив выражение для L в виде суммы

$$L = L_0 + L_1 + L_2,$$

где L_0 не содержит производных $\dot{q}_i$, а L_1 и L_2 являются однородными функциями первого и второго порядка относительно $\dot{q}_i$, Остроградский, на основании формулы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i,$$

пишет

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \dot{q}_i = L_1 + 2L_2 = L + (L_2 - L_0) = L + H,$$

откуда получается

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Кроме того, исходя из формул

$$\sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \delta L - \sum_{i=1}^{k} p_i \delta \dot{q}_i$$

* См. стр. 311.

или

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} p_i \delta q_i = \delta L,$$

являющихся следствием уравнений Лагранжа, Остроградский сразу приходит к формулам

$$\delta S \equiv \delta \int_{0}^{t=t_1} (T+U)\,dt = \sum_{i=1}^{k} (p_i \delta q_i - p_{i0}\delta q_{i0}), \tag{25}$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad p_{i0} = -\frac{\partial S}{\partial q_{i0}}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t,\ q_1,\ q_2, \ldots,\ q_k;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots,\ \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{27}$$

которые были получены ранее Гамильтоном для частного случая, когда имеет место интеграл энергии, т. е. в случае стационарных связей. Далее Остроградский доказывает, так же как это сделал Якоби для свободной системы, что полный интеграл уравнения (27) даст все интегралы канонической системы уравнений динамики.

Существенно отметить, что рассматриваемая работа явилась первой работой, в которой рассмотрение задачи об интегрировании уравнений механики сделано в наиболее общем виде. Форма изложения отличается от формы, принятой у Гамильтона и Якоби, и идентична, по сути дела, с формой, которая принята теперь в руководствах по аналитической механике.

В этой же работе Остроградский, исходя из более общих предпосылок, чем Гамильтон, приходит к формуле (25), имеющейся у Гамильтона. Этим самым он расширяет область ее применения и взгляд на принцип стационарного действия, который этой формулой выражается. Действительно, предполагая, что вариации координат для начального и конечного моментов времени равны нулю, мы имеем для действительного движения системы

$$\delta \int_{0}^{t} (T+U)\,dt = 0. \tag{28}$$

Получив формулу (25), Остроградский, как это ни странно, ничего не говорит о том, что при закрепленных концах, когда $(\delta q)_{t_1} = (\delta q)_0 = 0$, она выражает собой принцип стационарного действия. Как заметил еще Гамильтон, этот принцип позволяет установить уравнения движения системы, чем он отличается от принципа переменного действия, который позволяет установить еще и интегралы (26) этих уравнений.

Непосредственно о принципе стационарного действия Остроградский говорит в работе «О дифференциальных уравнениях, относящихся к проблеме изопериметров» (1850), а также в одном из писем к проф. Брашману.

В указанной работе 1850 г., посвященной собственно вариационному исчислению, рассматриваются условия экстремума интеграла

$$S=\int_{0}^{t_1} L dt,$$

где L зависит от многих функций $x, y, z, \ldots,$ а также их производных $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ по t.

Для этой задачи Остроградский получает уравнения, являющиеся обобщением уравнений Эйлера, и показывает, как можно привести их к каноническому виду. Рассматривая, в частности, механическую задачу, когда $L=T+U$ зависит от координат q_i и их первых производных, он указывает, что канонические уравнения механики, а следовательно, и уравнения Лагранжа второго рода, являются необходимыми условиями экстремума интеграла

$$S=\int_{t=0}^{t=t_1}(T+U)\, dt$$

при условии

$$(\delta q_i)_{t_1}=(\delta q_i)_0=0. \tag{29}$$

Иначе говоря, уравнения движения механической системы приводят при условиях $(\delta q)_0=(\delta q)_t=0$ к стационарности интеграла S, что и составляет содержание принципа стационарного действия.

Следует, однако, особо отметить, что, имея в виду получение этого принципа как принципа механики, рациональнее пользоваться теми рассуждениями, которые даются Остроградским в уже рассмотренной работе «Об интегралах Общих уравнений динамики». Эти рассуждения, приведенные для случая нестационарных связей в обобщенных координатах, являются наиболее общими и наиболее простыми.

Говоря о принципе стационарного действия, следует для полноты исторической картины вернуться несколько назад и рассмотреть принцип наименьшего действия Лагранжа. Рассуждения Лагранжа основаны на предположении, что имеет место интеграл энергии

$$T=U+H, \quad \text{где} \quad T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu^2,$$

или

$$\delta T=\delta U.$$

Но, с другой стороны,

$$\delta U = Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu) = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots,$$

а следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu \delta V_\nu = \delta T,$$

так как

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d}{dt} (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta \dot{x}_\nu + \dot{y}_\nu \delta \dot{y}_\nu + \dot{z}_\nu \delta \dot{z}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \frac{d}{dt} (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu \delta V_\nu. \qquad (29)$$

Замечая, что

$$V_\nu dt = ds_\nu \quad \text{и} \quad \delta V_\nu dt = \delta ds_\nu,$$

Лагранж на основе изложенного пишет вместо (29) следующее выражение:

$$d \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\dot{x}_\nu \delta x_\nu + \dot{y}_\nu \delta y_\nu + \dot{z}_\nu \delta z_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (ds_\nu \delta V_\nu + V_\nu \delta ds_\nu) = \delta \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu ds_\nu,$$

откуда, считая вариации координат в начальной и конечной точках равными нулю, он получает

$$\delta \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_{A_\nu}^{B_\nu} V_\nu ds_\nu = 0.$$

Наконец, Лагранж отмечает, что так как $ds_\nu = V_\nu dt$, то величина

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_{A_\nu}^{B_\nu} V_\nu ds_\nu,$$

которая представляет собой максимум или минимум, может быть приведена к следующему виду:

$$\int\limits^{t=t_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu^2 \right) dt,$$

т. е. к виду

$$V = \int\limits_{t=0}^{t=t_1} 2T dt. \quad (30)$$

Из изложенного видно, что Гамильтон полностью повторил вывод Лагранжа, но при этом ввел существенное обобщение, заключающееся в том, что величина δH не равна нулю, почему исходное уравнение имело у Гамильтона вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu) = \delta (T - H),$$

откуда, пользуясь теми же преобразованиями, что и Лагранж, Гамильтон получает формулы (12) и (13), приведенные на стр. 523 настоящего сборника. Якоби в работе 1837 г. (см. сноску на стр. 525) обратил внимание на то, что постоянство H относительно времени несущественно, и исходил непосредственно из формулы (13).

В письме о принципе стационарного действия, написанном в 1853 г. проф. Брашману, Остроградский записывает основное уравнение задачи в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (\ddot{x}_\nu \delta x_\nu + \ddot{y}_\nu \delta y_\nu + \ddot{z}_\nu \delta z_\nu) = \delta U$$

и, проделывая те же самые преобразования, что и Лагранж, получает формулу (13), не связывая себя предположением, что имеет место интеграл энергии.

В этом же письме он утверждает, что анализ Лагранжа неправилен. Последнее вызвало, после опубликования письма в 1866 г., целый ряд статей, в том числе статьи Ф. А. Слудского и М. И. Талызина,* в которых разбирался вопрос о принципе Гамильтона-Остроградского и о принципе Лагранжа. Слудский выяснил, что принцип Гамильтона-Остроградского и принцип Лагранжа представляют собой два различных принципа. Это обстоятельство

---

* Ф. А. Слудский. О начале наименьшего действия. Матем. сборник, 1867, т. 2, вып. 1, стр. 45—50; М. И. Талызин. О начале наименьшего действия. Матем. сборник, 1867, т. 2, вып. 2, стр. 143—154.

сразу видно хотя бы уже из того, что у Гамильтона $\delta H \neq 0$, тогда как у Лагранжа эта величина равна нулю. Последнее обстоятельство приводит к тому, что при одной и той же на всех допустимых линиях начальной энергии H время следования по этим линиям будет разное и будет определяться в зависимости от формы пути. В соответствии с этим верхний предел интеграла будет переменным, вариация этого предела не будет равна нулю, и потому интеграл должен подвергаться полному варьированию (общая форма вариации)

$$\Delta V = \delta V + \dot{V}\delta t.$$

Следует, однако, еще раз отметить, что в наиболее общей и оригинальной форме общая формула принципа переменного действия была получена Остроградским в статье «Об интегралах общих уравнений динамики». Из этой формулы при $(\delta q)_{t=0} = (\delta q)_{t=t_1} = 0$ вытекает и принцип стационарного действия.

Последней работой Остроградского по механике является работа «К общей теории удара», в которой он распространяет принцип возможных перемещений на явление неупругого удара, исходя из формулы

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu \cos\omega_\nu \delta\varepsilon_\nu = \delta\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu V_\nu^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \cos\varphi_\nu \delta\varepsilon_\nu + \lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \ldots, \tag{31}$$

где ω_ν — угол между вектором скорости $\vec{V}_\nu$ и вектором возможного перемещения $\delta\vec{\varepsilon}_\nu$; φ_ν — угол между вектором силы и тем же вектором $\delta\vec{\varepsilon}_\nu$.

Эту формулу легко получить из общего уравнения динамики, если иметь в виду, что

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot\delta\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\delta\vec{\varepsilon}) - \vec{V}\cdot\frac{d\delta\vec{\varepsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\delta\vec{\varepsilon}) - (\vec{V}\cdot\delta\vec{V}) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{V}\cdot\delta\vec{\varepsilon}) - \delta\frac{\vec{V}}{2}.$$

Если удар сводится к мгновенному снятию связей, то после удара будем иметь

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1} m_\nu U_\nu \cos\sigma_\nu \delta\varepsilon_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \cos\varphi_\nu \delta\varepsilon_\nu + \delta\sum_{\nu=1}^{n}\frac{m_\nu U_\nu^2}{2}, \tag{32}$$

где U_ν — скорости точек, освободившихся от связей.

Из формул (31) и (32) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu \cos\varphi_\nu \delta\varepsilon_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U_\nu \cos\sigma_\nu \delta\varepsilon_\nu\right) =$$

$$= \lambda\delta L + \lambda_1 \delta L_1 + \ldots + \delta \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{2}(V_\nu^2 - U_\nu^2).$$

Умножение этой формулы на dt и интегрирование в пределах от t_0 до $t_0 + \tau$, где τ — длительность удара, дает при пренебрежении членами, имеющими порядок малости τ и выше,

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu \cos\varphi_\nu \delta\varepsilon_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U_\nu \cos\sigma_\nu \delta\varepsilon_\nu = \mu\delta L + \mu_1 \delta L_1 + \ldots, \tag{33}$$

где μ, μ_1, ... выражаются интегралами вида

$$\mu = \int_0^\tau \lambda dt.$$

Формула (33) является основной формулой аналитической теории удара, и из нее Остроградский получает ряд следствий и теорем, в частности известную теорему Карно.

Следует отметить, что обобщение этой теоремы, доказанной самим Карно лишь для случая неупругого удара двух тел, было выполнено до появления работы Остроградского. Однако, по выражению А. М. Ляпунова, «если названное обобщение и было сделано раньше, то этим нисколько не умаляется важность рассматриваемого мемуара, значение которого обусловливается не этим обобщением, естественно вытекающим из анализа Остроградского, а тем, что в мемуаре этом дается общий способ решения вопросов теории удара». *

В заключение приведенного краткого обзора работ Остроградского по аналитической механике можно лишь повторить вслед за Н. Е. Жуковским, что «эти работы захватывают собой почти всю область вопросов, на разрешении которых сосредоточивались в то время мысли выдающихся европейских геометров. М. В. Остроградский, так же как они, чувствовал, какие вопросы назрели к решению, и разрабатывал их самостоятельно, иногда отставая от своих европейских товарищей, иногда опережая их. В тот период

* А. М. Ляпунов. О заслугах М. В. Остроградского в области механики. В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский, стр. 115—118.

расцвета прикладных наук, когда прогресс математических знаний дал сразу возможность разрешить целый ряд существенных вопросов естествознания, мы часто встречаемся с однородными работами выдающихся мыслителей. Нам, русским, отрадно отметить теперь, что в это время деятельности Фурье, Коши, Пуассона, Якоби и Гаусса мы не остались в стороне, так как имели М. В. Остроградского». *

Общие соображения относительно моментов сил

Работа была доложена 7 ноября 1834 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1838, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 129—150) под заглавием «Considérations générales sur les moments des forces».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] Действительно, если система находится в равновесии, то для каждой ее точки M_k мы имеем

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\bar{F}_k$ — равнодействующая заданных сил, а $\bar{N}_k$ — равнодействующая связей, приложенных к точке M_k. Сообщая точкам системы возможные перемещения $\delta \bar{r}_k$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta r_k = 0. \tag{1}$$

В случае неудерживающих связей $\sum_{k=1}^{n} \bar{N}_k \cdot \delta \bar{r}_k \geqslant 0$. Следовательно, для выполнения (1) нужно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \leqslant 0.$$

[2] Таким образом, величины dL, dM, ... являются левыми частями неравенств вида

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu} dx_\nu + b_{\;\nu} dy_\nu + c_{\mu\nu} dz_\nu) \geqslant 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

где n — число точек системы, а m — число связей.

[3] Здесь имеются в виду изменения координат точек системы.

---

* Н. Е. Жуковский. Ученые труды М. В. Остроградского по механике. Собр. соч., т. 7, М.—Л., 1950, стр. 246.

[4] Эти уравнения получаются из (A) вследствие того, что

$$r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2},$$

и, следовательно, дифференциалы

$$dr_i = \frac{dr_i}{dx_{i+1}} dx_{i+1} + \frac{dr_i}{dx_i} dx_i,$$

$$dr_{i-1} = \frac{dr_{i-1}}{dx_i} dx_i + \frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}} dx_{i-1}$$

одновременно будут содержать dx_i, которое, выходя при суммировании по индексу i за скобки, и приводит к упомянутым уравнениям. Из написанного выражения для r_i вытекает также равенство

$$\frac{dr_{i-1}}{dx_i} = -\frac{dr_{i-1}}{dx_{i-1}},$$

которым дальше пользуется Остроградский.

[5] Это утверждение следует понимать в том смысле, что в случае неудерживающих связей вариации координат точек системы подчиняются неравенствам вида

$$\delta L_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} (a_{\mu\nu}\delta x_\nu + b_{\mu\nu}\delta y_\nu + c_{\mu\nu}\delta z_\nu) \geqslant 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

О мгновенных перемещениях систем, подчиненных переменным условиям

Работа была доложена 20 апреля 1838 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1838, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 1, стр. 565—600) под заглавием «Mémoire sur les déplacemen(t)s instantanés des systèmes assujettis à des conditions variables».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] Здесь имеется в виду статья «Общие соображения относительно моментов сил», помещенная в настоящем сборнике.

[2] Это относится к случаю нестационарных связей.

[3] В первом приближении

$$BC = a\frac{\Delta t^2}{2} = \frac{P}{m} \cdot \frac{\Delta t^2}{2},$$

где a — ускорение. Отсюда

$$P = 2m\frac{BC}{\Delta t^2}.$$

О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции

Работа была доложена 9 декабря 1841 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Bulletin scientifique de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1842, t. 10, стр. 34—41) под заглавием «Sur le principe des vitesses virtuelles et sur la force d'inertie».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] Под силой ускорения здесь подразумевается сила, отнесенная к единице массы.

О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики

Работа была доложена 24 сентября 1847 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Bulletin de la classe phys.-math. de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg» (1849, t. 7, стр. 113—125) под заглавием «Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de dynamique».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] Здесь имеются в виду условия, связывающие возможные перемещения.

[2] Это место у Остроградского неясно. В дальнейшем δV принимается всюду за полный дифференциал.

[3] Изменение знака $Q_{i,\,k}$ при перестановке индексов непосредственно вытекает из рассмотрения выражения, стоящего под знаком суммы в правой части (2a).

[4] Здесь через V обозначается то, что ранее обозначалось через U.

[5] Формулы (5) не представляют собой интегралов системы (4) и при переменных a_k, при обычном понимании понятия интеграла. Здесь Остроградский совершает замену переменных, переходя от функций x_i, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ к новым искомым функциям a_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, для которых он в дальнейшем и получает систему дифференциальных уравнений. Указанная замена переменных является «методом вариации произвольных постоянных».

Об интегралах общих уравнений динамики

Работа была доложена 6 октября 1848 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Bulletin de la classe phys.-math. de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1850, t. 8, № 3, стр. 33—43) под заглавием «Sur les intégrales des équations générales de la dynamique».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] В статье «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» через U обозначена полная энергия системы, а через V — силовая функция. В настоящей статье U есть силовая функция, а V — кинетический потенциал.

Письма академика Остроградского к профессору Брашману

Были опубликованы на русском языке в «Математическом сборнике» (1866, стр. XXVII—XXXVIII).

Письмо 4-е

[1] Более подробно см. в работе Остроградского «К общей теории удара» (1854), помещенной в настоящем сборнике.

Письмо 5-е

[1] Рассмотрим две системы координат: подвижную x, y, z и неподвижную x_1, y_1, z_1 (рис. 1).

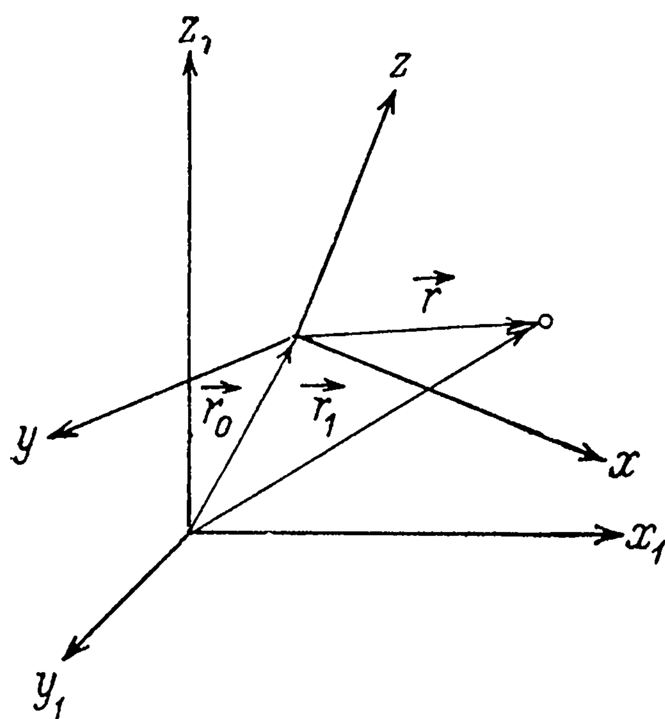


Рис. 1.

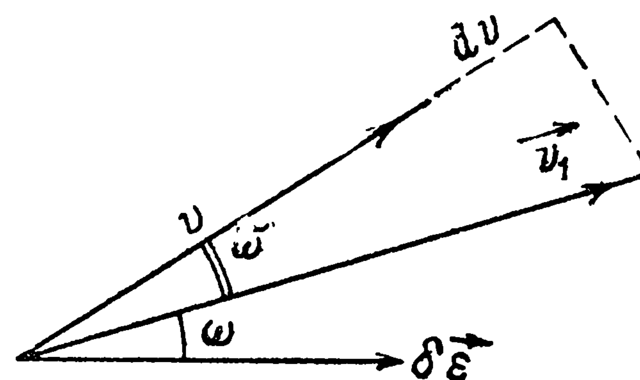


Рис. 2.

Проекции $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$ на подвижные оси обозначим через x, y, z, на неподвижные — ξ, η, ζ. Проекции $\bar{r}_0$ на неподвижные оси обозначим через α, β, γ.

Если составить таблицу направляющих косинусов

	x	y	z
x_1	a	b	c
y_1	a'	b'	c'
z_1	a''	b''	c''

,

то проекции $\bar{r}$ на подвижную систему можно будет выразить через его проекции на неподвижные оси координат, и наоборот.

[2] Так как скалярное произведение $\bar{i}\bar{k} = ac + a'c' + a''c''$ и $\bar{i}d\bar{k} = -\bar{k}d\bar{i}$, то $cda + c'da' + c''da'' = -adc + a'dc' + a''dc''$.

К общей теории удара

Работа была доложена 26 мая 1854 г. на заседании Академии наук и опубликована в «Mémoires de l'Académie des sciences de St.-Pétersbourg» (1857, VI sér., sciences math., phys. et nat., t. 6, стр. 267—303) под заглавием «Mémoire sur la théorie générale de la percussion».

На русском языке публикуется впервые. Перевод Т. Н. Кладо.

[1] Если за фиксированное в пространстве направление принять направление скорости v (рис. 2), то изменение dv этой скорости вследствие изменения только ее величины будет равно скорости изменения проекции $\delta\varepsilon \cdot \cos\omega$, т. е.

$$\frac{d}{dt}(\delta\varepsilon \cdot \cos\omega) = \delta v.$$

[2] Предыдущие рассуждения являются лишними. Написанное уравнение и есть уравнение (6), в котором левая часть представлена в виде

$$\frac{d}{dt}\sum m_i v_i \cos\varphi_i d\xi_i = \frac{d}{dt}\sum (m_i \vec{v}_i d\vec{r}_i) = \frac{d}{dt}(p\delta\xi + q\delta\eta + r\delta\xi + \ldots).$$

Н. Н. Поляхов

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ОСНОВНЫХ ПЕЧАТНЫХ И ЛИТОГРАФИРОВАННЫХ ТРУДОВ М. В. ОСТРОГРАДСКОГО И ЛИТЕРАТУРЫ О НЕМ

(Составила М. Г. Новлянская)

1. Научные труды М. В. Остроградского

1826

1. Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique. [О распространении волн в цилиндрическом бассейне]. — Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France. Sc. math. et phys., 1832, t. 3, pp. 23—44.

Читано в заседании Парижской Академии наук 6 ноября 1826 г.
Отзыв Лакруа и Коши (1829). (См. №№ 112, 113).

1828

2. Note sur une intégrale qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroides. [Заметка об интеграле, встречающемся в вычислении притяжения сфероидов]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 39—53.

Читано 2 июля 1828 г.
Рец.: Bull des sc. math., phys. et chim. de Férussac, Paris, 1830, t. 14, pp. 81—88. (См. № 115).

3. Note sur les intégrales définies. [Заметка об определенных интегралах]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 117—122.

Читано 29 октября 1828 г.

4. Note sur la théorie de la chaleur. [Заметка по теории теплоты]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 129—138. (См. № 6).

Читано 5 ноября 1828 г.

То же в русск. перев. — В кн.: Б. В. Гнеденко. М. В. Остроградский. М., 1952, стр. 273—284. (См. № 276).

То же. — Успехи матем. наук, 1953, т. 8, вып. 1(53), стр. 103—110.

То же в перев. на румынск. яз. под загл. «Notă asupra teorici caldurii». — An. Rom.-Sov., ser. mat.-fiz., 1954, № 1, pp. 21—28.

1829

5. Sur l'intégration des équations à différences partielles, relatives aux petites vibrations d'un milieu élastique. [Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругой среды]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 455—461.

Читано 10 июня 1829 г.

6. Deuxiéme note sur la théorie de la chaleur. [Вторая заметка по теории теплоты]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 123—126. (См. № 4).

Читано 8 июля 1 29 г.

7. Solution du problème sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide renfermé dans un vase ayant la forme d'un secteur cylindrique. [Решение задачи о распространении волн в бассейне, имеющем форму цилиндрического сектора]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, Bull. scient., p. 1.

Читано 16 сентябр. г.

8. Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique. [Заметка об изменении произвольных постоянных в задачах механики]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 109—115.

Читано 2 29 г.

Реф.: Bull. des sc. math., phys. et chim. de Férussac, Paris, 1830, t. 14, p. 25.

1830

9. Note sur différen(t)s points d'Analyse. [Заметка о различных вопросах анализа]. — Bull. des sc. math., phys. et chim. de Férussac, Paris, 1830, t. 14, pp. 249—255.

1831

10. Sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes. [О вековых неравенствах средних движений планет]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, Bull. scient., № 1, p. XIX.

Читано 14 декабря 1831 г.

1832

11. Note sur l'équilibre d'un fil élastique. [Заметка о равновесии упругой нити]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, Bull. scient., № 4, pp. 1—11.

Читано 16 мая 1832 г.

12. Mémoire sur l'intégration des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations des corps élastiques. [Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругих тел].— Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, pp. 339—371.

Читано 27 июня 1832 г.

1833

13. Mémoire sur l'intégration des fractions ration(n)elles. [Об интегрировании рациональных дробей]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, pp. 569—593. (См. № 15).

Читано 22 марта 1833 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1833, 23 p.

14. Note sur la rélation que peuvent avoir entre elles les intégrales des fonctions algébriques. [Заметка о соотношении, в каком могут находиться между собою интегралы алгебраических функций]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, Bull. scient., № 6, pp. VIII—XI.

Читано 5 июля 1833 г.

15. Suite du mémoire sur l'intégration des fractions ration(n)elles. [Продолжение статьи об интегрировании рациональных дробей]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1833, t. 2, pp. 657—671. (См. № 13).

Читано 23 августа 1833 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1833, 11 p.

1834

16. Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. [Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 35—58.

Читано 24 января 1834 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg. 1834, 22 p.

То же. — Journ. für die reine und ang. Mathem., Berlin, 1836, Bd. 15, ss. 332—354.

То же на англ. яз. — В кн.: J. Todhunter. A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. Cambridge, 1861, pp. 111—139.

17. Extrait d'un mémoire sur la probabilité des erreurs des tribunaux. [Извлечение из мемуара о вероятности ошибок в судебных приговорах]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, Bull. scient., № 3, pp. XIX—XXV.

Читано 12 июня 1834 г.

18. Considérations générales sur les momen(t)s des forces. [Общие соображения о моментах сил]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 129—150.

Читано 7 ноября 1834 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1848, 22 p.

1835

19. Note sur la méthode des approximations successives. [Заметка о методе последовательных приближений]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 233—238.

Читано 11 сентября 1835 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1835, 6 p.

То же. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1836, t. 1. Extrait des mémoires, pp. 1—2.

1836

20. Sur un cas singulier de l'équilibre des fluides incompressibles. [Об особом случае равновесия несжимаемых жидкостей]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 333—340.

Читано 19 февраля 1836 г.

21. Sur l'équation relative à la propagation de la chaleur dans l'intérieur des liquides. [Об уравнении, относящемся к распространению теплоты внутри жидкости]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 353—357.

Читано 8 апреля 1836 г.

То же. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1836, t. 1; № 4. Extraits des mémoires, pp. 25—26.

22. Tables des racines primitives pour tous les nombres premiers au-dessous de 200, avec les tables pour trouver l'indice d'un nombre donné et pour trouver le nombre d'après l'indice. [Таблицы первообразных корней для всех простых чисел до 200 и таблицы, в которых по данному числу находится указатель и по данному указателю находится число]. — Mém de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 359—385.

Читано 22 апреля 1836 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1836, 27 p.

То же в сокращ. виде. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1836, t. 1, p. 32.

23. Mémoire sur le calcul des fonctions génératrices. [О вычислении производящих функций]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1836, t. 1, № 10. Extraits des mémoires, pp. 73—75.

Читано 8 июля 1836 г.

24. Sur la transformation des variables dans les intégrales multiples. [О преобразовании переменных в-кратных интегралах]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 401—407.

Читано 12 августа 1836 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1836, 7 p.

То же в русск. перев. — В кн.: Б. В. Гнеденко. М. В. Остроградский, стр. 284—290. (См. № 276).

1837

25. Notes sur différents sujets de l'Analyse mathématique: a) sur les fonctions exponentielles; b) sur une espèce de fonctions des coordonnées sphériques; c) sur le calcul des variations. [Заметки по различным вопросам математического анализа: а) о показательных функциях; б) об одном виде функции в сферических координатах; с) о вариационном исчислении]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1838, t. 3, № 14, col. 209—218.

Читано 1 декабря 1837 г.

1838

26. Mémoire sur les déplacemen(t)s instantanés des systèmes assujettis à des conditions variables. [О мгновенных перемещениях систем, подчиненных переменным условиям]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 1, 1835—1838, pp. 565—600.

Читано 20 апреля 1838 г.

То же. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1838, t. 4, № 12. Extraits des mémoires, col. 177—179.

27. Note sur les équations du mouvement d'un point matériel placé dans l'intérieur d'un tube rectiligne tournant autour d'un axe donné. [Заметка об уравнениях движения материальной точки, помещенной внутри прямолинейной трубки, вращающейся около данной оси]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1838, t. 4, № 14, col. 209—212.

Читано 22 июня 1838 г.

28. Note sur quelques formules relatives à l'attraction mutuelle d'une sphère et d'un sphéroïde. [Заметка о некоторых формах, относящихся к взаимному притяжению сферы и сфероида]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1838, t. 4, № 24, col. 369—371.

Читано 19 октября 1838 г.

29. Note sur les équations différentielles linéaires. [Заметка о линейных дифференциальных уравнениях]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1839, t. 5, № 3, col. 33—35.

То же в русск. перев. — В кн.: Б. В. Гнеденко. М. В. Остроградский, стр. 290—292. (См. № 276).

1839

30. О равновесии веревочного многоугольника и гибкой нерастяжимой нити. — Журн. путей сообщ., СПб., 1839, т. 2, кн. 2, стр. 105—129.

Читано в Академии наук 18 января 1839 г.
Рец.: Ф. Менцов. Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1839, ч. 23, отд. VI, стр. 302, 307—308.

31. De l'aimantation mutuelle entre des barres disjointes. [О взаимном намагничивании разобщенных стержней]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1839, t. 5, № 22, col. 346—352.

Читано 5 апреля и 12 мая 1839 г.
Реф.: Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1839, ч. 22, отд. 3, стр. 99.

32. Mémoire sur les quadratures définies. [Об определенных интегралах]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 2, 1839—1841, pp. 309—336.

Читано 23 августа 1839 г.

То же. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1840, t. 6, № 11—12. Extrait, col. 161—162.

Реф.: Журнал Мин. нар. просв., СПб., 1839, ч. 23, отд. 3, стр. 28.

33. Tables pour faciliter le calcul de trajectoire que décrit un mobile dans un milieu resistant. [Таблицы, облегчающие вычисление траектории, которую описывает движущаяся точка в сопротивляющейся среде]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., t. 2, 1839—1841, pp. 437—445.

Представлено 20 декабря 1839 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1839, 9 p.

1840

34. Sur une note relative aux intégrales définies déduites de la théorie des surfaces orthogonales. [К заметке об определенных интегралах, выведенных из теории ортогональных поверхностей]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1840, t. 7, № 24, col. 362—365.

Читано 29 мая 1840 г.

Речь идет о заметке Ляме, напечатанной в «Journal des mathématiques pures et appliquées» (Paris, 1838, t. 3, pp. 552—555).

35. Note sur le mouvement des projectiles sphériques dans un milieu resistant. [Заметка о движении сферических снарядов в сопротивляющейся среде]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1841, t. 8, № 5, col. 65—78.

Читано 30 октября 1840 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1841, 13 p.

36. Mémoire sur le mouvement des projectiles sphériques dans l'air. [О движении сферических снарядов в воздухе]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1841, t. 8, № 9, col. 133—140.

Читано 18 декабря 1840 г.

1841

37. Note sur une question particulière des maxima relatifs. [Заметка об одном частном вопросе, касающемся относительных максимумов]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1841, t. 8, № 21, col. 327—331.

Читано 29 января 1841 г.

38. Sur le principe des vitesses virtuelles et sur la force d'inertie. [О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1842, t. 10, № 1—3, col. 34—41.

Читано 9 декабря 1841 г.

1842

39. Sur les sphéroïdes dont tous les moments d'inertie sont égaux. [О сфероидах, все моменты инерции которых равны]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc., de St.-Pbg., 1843, t. 1, № 4, col. 60—64.

Читано 13 мая 1842 г.

40. Sur les intégrales des fonctions algébriques. [Об интегралах алгебраических функций]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1843, t. 1, № 8, col. 113—118.

Читано 23 сентября 1842 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1842, pp. 113—114.

1844

41. De l'intégration des fractions rationnelles. [Об интегрировании рациональных дробей]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1845, t. 4, № 10—11, col. 145—167; № 18—19, col. 286—300.

Читано 22 ноября 1844 г.

42. Sur le mouvement des fluides. Extrait. [О движении жидкости. Извлечение]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1845, t. 4, № 3, col. 33—34.

Читано 13 декабря 1844 г.

1846

43. Sur une question des probabilités. Extrait. [По поводу одного вопроса о вероятностях. Извлечение]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1848, t. 6, № 21—22, col. 321—346.

Читано 23 октября 1846 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1846, 13 p.

1847

44. Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de dynamique. [О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1849, t. 7, col. 113—125.

Читано 24 сентября 1847 г.

1848

45. Sur les intégrales des équations générales de la dynamique. [Об интегралах общих уравнений динамики]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1850, t. 8, № 3, col. 33—43.

Читано 6 октября 1848 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1853, t. 1 (1849—1853), pp. 8—22.

46. Mémoire sur les équations différentielles, relatives au problème des

isopérimètres. [О дифференциальных уравнениях, относящихся к задаче изопериметров]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., 1850, t. 4, pp. 385—517.

Читано 17 (29) ноября 1848 г.

1849

47. Sur les racines égales des polynômes entiers. [О равных корнях целых полиномов]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1850, t. 8, № 13, col. 193—204.

Читано 28 сентября 1849 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1853, t. 1 (1849—1853), pp. 86—100.

1850

48. Sur les dérivées des fonctions algébriques. [О производных алгебраических функций]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1853, t. 11, № 22, col. 337—342.

Читано 12 июня 1850 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1853, t. 1 (1849—1853), pp. 557—558.

1854

49. Mémoire sur la théorie générale de la percussion. [К общей теории удара]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math. et phys., 1857, t. 6, pp. 267—303.

Читано 26 мая 1854 г.

То же. — Отд. оттиск. St.-Pbg., 1854, (2), 35 p.

Резюме: Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1856, t. 14, p. 3?9.

1856

50. Note sur les facteurs égaux de polynômes entiers. [Заметка о равных множителях целых полиномов]. — Comptes rendus de l'Acad. des sc., Paris, 1856, t. 42, pp. 930—931.

Представлено 19 мая 1856 г.

То же. — Liouville. Journ. de Mathem. pures et appliquées, 1856, t. 1, pp. 287—288.

51. Новый способ интегрирования четырех дифференциальных уравнений. — Морск. сборник, СПб., 1856, т. 25, № 12, ч. неофиц., стр. 149—153.

1857

52. Sur l'usage des polynômes linéaires en dynamique. [Об использовании линейных полиномов в динамике]. — Comptes rendus de l'Acad. des sc., Paris, 1857, t. 44, pp. 962—970.

Представлено 11 мая 1857 г.

1858

53. Способ вариаций. (Перевод статьи М. В. Остроградского). — В кн.: В. Беренс. Учебное пособие для военно-учебных заведений. Дифференциальное исчисление, стр. 475—516. (См. № 133).

То же. — Отд. оттиск. 40 стр. (без выходных данных).

1859

54. Sur la probabilité des hypothèses d'après les évenements. [О вероятности гипотез после испытаний]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1859, t. 17, № 33, col. 516—522.

Читано 18 марта 1859 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1866, t. 3 (1859—1866), pp. 22—30.

1860

55. Sur la courbure des surfaces. [О кривизне поверхностей]. — Bull. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1860, t. 1, col. 545—548.

Читано 20 января 1860 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1866, t. 3 (1859—1866), pp. 236—241.

56. Sur une intégrale définie. [Об одном определенном интеграле]. — Bull. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1861, t. 3, pp. 65—68.

Читано 15 июня 1860 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1866, t. 3 (1859—1866), pp. 294—298.

2. Печатные и литографированные курсы лекций, учебники, учебные программы и статьи, относящиеся к педагогической деятельности М. В. Остроградского

1831

57. Cours de mécanique céleste fait par M-r M. A. Ostrogradski et redigé par J. Janouschevski, capitaine du génie des voies de communication. [Курс небесной механики, читанный г-ном М. А. Остроградским и записанный капитаном корпуса инженеров путей сообщения Я. Янушевским]. Типогр. Акад. наук, СПб., 1831, 95 стр. (См. № 114).

Отзыв Арраго и Пуассона (1830).

1834

58. Leçons de mécanique analytique à l'usage de l'Institut des ponts et des chaussées russes. [Лекции аналитической механики, предназначенные для Института путей сообщения]. 1834, 348 стр., 3 л. черт.

Литогр.

То же в перев. на русск. яз. и с некоторыми дополнениями из лекций, читанных в 1852 г. — Полн. собр. соч. акад. М. В. Остроградского, изд. Акад. наук, М.—Л., 1946, т. 1, ч. 2, 288 стр. (См. № 78).

Литогр. лекции в двух экземплярах хранятся в архиве Академии наук СССР.

1837

59. Вариационное исчисление. [1837], 22 стр.

Литогр.

То же с некоторыми изменениями. — В кн.: Лекции по аналитической механике. Полн. собр. соч., М.—Л., 1946, т. 1, ч. 2, стр. 271—285. (См. № 78).

Литогр. лекции находятся в библиотеке Ленинградского Института инженеров ж.-д. транспорта.

60. Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа, читанные в Морском кадетском корпусе академиком Остроградским. Составлены Корп. кораб. инж. кап. С. Бурачком и лейтенантом С. Зеленым. СПб., 1837. Две части с общей пагинацией: ч. I. Решение алгебр[а]ических уравнений, XXIV, 305 стр., прилож. 1 л. черт.; ч. II. Теория алгебр[а]ических функций, XXXII, 666 стр.

То же. — Полн. собр. соч. акад. М. В. Остроградского под ред. акад. А. Н. Крылова, изд. Акад. наук СССР, М.—Л., 1940, т. 2, 464 стр. (См. № 77).

Рец.: 1) Сев. пчела (1837). (См. № 118); 2) Журн. Мин. нар. просв. СПб., 1838, ч. 19, отд. 3, стр. 132—135. (См. № 119); 3) Библ. для чтен. (1837). (См. № 117).

1840

61. Начала аналитической механики. — Журн. «Маяк соврем. просвещ. и образованности», СПб., 1840, вып. 1, ч. 1, стр. 7—17.

Статья снабжена примечаниями редактора журнала С. С. Бурачка.

62. Отрывки из лекции академика Остроградского. — Журн. «Маяк соврем. просвещ. и образованности», СПб., 1840, ч. 4, отд. «Смесь», стр. 59—63.

Лекции напечатаны по запискам мичмана Пугилова.

1841

63. Извлечение из первой публичной лекции по трансцендентному анализу, читанной академиком Остроградским. — Журн. путей сообщ., СПб., 1841, т. 2, кн. 1, стр. 30—42.

Напечатано по записям поручиков Собко и Агамонова.

64. Извлечение из второй публичной лекции по трансцендентному анализу, читанной академиком Остроградским. — Журн. путей сообщ., СПб., 1841, т. 2, кн. 2, стр. 92—103.

Напечатано по записям поручиков Собко и Агамонова.

1851

65. Note sur le traité de trigonométrie à l'usage des écoles militaires. [Заметка об учебнике по тригонометрии для военных школ]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1852, t. 10, № 1, col. 11—13.

Читано 8 августа 1851 г.

То же. — Mél. math. et astr., St.-Pbg., 1853, t. 1 (1849—1853), pp. 309—312.

66. Программа и конспект тригонометрии для руководства в военно-учебных заведениях. СПб., 1851, 64 стр.

67. Программа трехгодичного курса математических наук в офицерском классе, составленная академиком Остроградским. 14 стр. (без выходных данных).

1852

68. Аналитическая механика. Лекции, читанные в Главном педагогическом институте в 1852 г. Записаны Н. С. Будаевым. 108 стр.

Литогр.

Описание сделано по данным акад. А. Н. Крылова, изложенным в предисловии к «Лекциям по аналитической механике», изданным в 1946 г. (См. № 78).

1855—1860

69. Учебное руководство для военно-учебных заведений. Руководство начальной геометрии, составленное на основании наставления для образования воспитанников военно-учебных заведений, утвержд. 24 декабря 1848 г.

Курс II общего класса. СПб., 1855, 140 стр., 3 л. черт.

Курс III общего класса. СПб., 1857, IX, 406 стр. (общ. пагин. с предыдущ. курсом).

Курс V общего класса. СПб., 1860, VIII, 204 стр. (отд. пагин.), 1 л. черт.

Рец.: 1) Н. Г. Чернышевский (1855). (См. № 132); 2) В. Воленс (1862). (См. № 145).

1856—1857

70. Институт Корпуса инженеров путей сообщения. Записки аналитической механики, составленные воспитанниками 1-го спец. класса с лекций г-на академика Остроградского. 1856—57, (2), 245 стр.

Литогр.

Лекции имеются в научно-технич. библиотеке Ленинградского Института инженеров ж.-д. транспорта.

71. Записки геометрии. Для 2-го общего класса. (По курсу г-на Остроградского). Составлены надворным советником А. Шведовым. 1857, 77 стр.

Литогр.

1858—1859

72. Записки интегрального исчисления, составленные с публичных лекций господина академика Остроградского. 1858—1859, 140 стр.

Литогр.

Лекции вместе с другими рукописями переплетены в одну книгу, с именем В. А. Евтушевского на корешке, и хранятся в рукописном отделе Гос. библиотеки им. В. И. Ленина.

Описание сделано по статье В. И. Антроповой «Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского» (1955). (См. № 295).

1860

73. Considérations sur l'enseignement. [Соображения относительно преподавания]. St.-Pétersbourg—Paris, 1860, 53 p.

Совм. с А. Блумом.

74. Политехнические таблицы, собрание, представляющее сокращенное изложение наук математических, физических и их применений, издаваемые под управлением: для математических наук, г. М. Остроградского, члена С.-Петербургской Академии наук, Императорского французского института,

академий Туринской, Бостонской, Римской, Копенгагенской и проч.; для физических и технических наук, г. Августа Блума, инженера, бывшего воспитанника Политехнической школы, и проч. СПб., 1860, 10 табл. и 2 л. черт.

Рец.: 1) Моск. ведом. (1861). (См. № 135); 2) Строитель, механик и технолог (1861). (См. № 138).

75. Арифметика. (Составл. совместно с А. Блумом). — В кн.: Политехнические таблицы. . ., 1860, 2 табл. (См. № 74).

76. Начальная геометрия. (Составл. совместно с А. Блумом). — В кн.: Политехнические таблицы. . ., 1860, 3 табл., 1 л. черт. (См. № 74).

1940

77. Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа, читанные в Морском кадетском корпусе в 1836 году академиком Остроградским. Составлены кораб. инж. С. Бурачком и лейтенантом С. Зеленым. Изд. 2-е. — Полн. собр. соч. акад. М. В. Остроградского под ред. акад. А. Н. Крылова, т. 2, изд. Акад. наук СССР, М.—Л., 1940, 464 стр.

С предисловием и примечаниями комиссии по изданию полного собрания сочинений М. В. Остроградского.

Первое издание см. № 60.

1946

78. Лекции по аналитической механике. Полн. собр. соч. акад. М. В. Остроградского под ред. акад. А. Н. Крылова, т. 1, ч. 2, изд. Акад. наук СССР, М.—Л., 1946, 288 стр. С предисловием А. Н. Крылова (стр. 3—4) и с прилож. отд. сброшир. «Замечаний акад. В. И. Смирнова к части 2-й тома I „Собрания сочинений акад. М. В. Остроградского“» (Л., 1946, 13 стр.).

В основу издания положен курс лекций по аналитической механике, читанный Остроградским в Институте путей сообщения в 30-х годах XIX в. и дополненный «Введением» и некоторыми новыми материалами, заимствованными из лекций по аналитической механике, читанных М. В. Остроградским в Главном педагогическом институте в 1852 г. (См. № 68).

3. Отзывы, доклады, научно-популярные статьи, письма и т. д.

1831

79. [Письмо к переводчику М. Ленину от 5 августа 1830 г.]. — В кн.: Начальные основания статики. Сочинение Л. Поансо. Издание пятое, рассмотренное и значительно пополненное. Перевел с французского М. Ленин, мичман Офицерского класса, состоящего при Морском кадетском корпусе, СПб., 1831, стр. XXV.

То же. — В статье: И. Я. Депман. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского, 1951, стр. 163—165. (См. № 261).

1832

80. [Отзыв о работе Н. И. Лобачевского «О новых началах геометрии»]. — Протоколы Конференции Акад. наук, заседание 31 октября 1832 г., § 602.

Текст на франц. яз.

То же. — См.: Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., Гос. изд. техн.-теорет. литер., М.—Л., 1946, т. 1, стр. 410.

То же с русск. перев. — В кн.: Л. Б. Модзалевский. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.—Л., 1948, стр. 331—332. (См. № 243).

81. [Рапорт Конференции Академии наук с отзывом о «Геометрии» Н. И. Лобачевского. 7 ноября 1832 г.]. — В кн.: Л. Б. Модзалевский. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.—Л., 1948, стр. 332—334. (См. № 243).

Текст на франц. яз. с русск. переводом.

82. Записка М. В. Остроградского о двух интегралах Н. И. Лобачевского. — В кн.: Л. Б. Модзалевский. Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. М.—Л., 1948, стр. 334—337. (См. № 243).

Текст на франц. яз. с русск. переводом.

1833

83. Разбор сочинения Я. Севастьянова: «Приложение начертательной геометрии к воздушной перспективе, к проекции карт и к гномонике». — Отчет С.-Петербургской Академии наук о втором присуждении учрежденных П. Н. Демидовым наград за 1832 год. СПб., 1833, стр. 11—12.

1838

84. Разбор сочинения профессора Брашмана: «Статика твердых и жидких тел». — Седьмое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1838 года. СПб., 1838, стр. 79—88.

Текст на франц. яз.

То же на русск. яз. в сокращ. виде. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1838, ч. 19, отд. 3, стр. 121.

1839

85. Разбор сочинения Ястржембского «Курс практической механики». Совм. с акад. В. Я. Буняковским. — Осьмое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1839 года. СПб., 1839, стр. 16—18.

То же. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1839, ч. 24, отд. 3, стр. 30—31.

86. «Предуведомление» к русскому переводу книги: Геометрическое изложение конических сечений г. Валласа, профессора математики в Эдинбургском университете. Перевел с английского М. Ленин, Корпуса корабельных инженеров капитан, бывший воспитанник Офицерского класса, состоящего при Морском кадетском корпусе, СПб., 1839, стр. III—IV.

То же. — И. Я. Депман. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского, 1951, стр. 167—168. (См. № 261).

1842

87. [Отзыв о статье проф. Шультена «Sur les réfractions et les réflexions pour de très petits angles d'incidence»]. — Bull. scient. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1842, t. 9, № 8, col. 143—144.

Доложен 4 июня 1841 г.

88. «Предуведомление» к кн.: Л. Поансо. Начальные основания статики. Сочинение, принятое для публичного преподавания. Издание седьмое, рассмотренное и значительно пополненное. Перевел с франц. М. Ленин, мичман Офицерского класса, состоящего при Морском кадетском корпусе, СПб., 1842, стр. I—III.

То же. — И. Я. Депман. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского, 1951, стр. 163—165. (См. № 261).

1843

89. Отзыв о статье проф. Соколова «Исследование некоторых предметов, относящихся к вариационному исчислению». — Bull. de la Cl. phys.-math., St.-Pbg., 1843, t. 1, № 17—18, col. 287.

Доложен 3 февраля 1843 г.

То же. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1843, ч. 39, отд. 3, стр. 35.

1844

90. Разбор сочинения проф. Московского университета И. Е. Зернова: «Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии». — Тринадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1844 года. СПб., 1844, стр. 35—38.

1845

91. Отзыв гг. академиков Остроградского, Купфера и Якоби о новом способе измерения скорости снарядов. — Артиллер. журн., СПб., 1845, № 2, стр. 69—71.

92. Разбор сочинения капитан-лейтенанта А. Зеленого под заглавием: «Краткое руководство начертательной геометрии». Составл. совм. с акад. В. Я. Буняковским. — Четырнадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1845 года. СПб., 1845, стр. 23—27, 87—95.

1846

93. [Отзыв о счетной арифметической машине Куммера]. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1849, t. 7, № 4, col. 50—51.

Доложен в заселании 23 октября 1846 г.

1847

94. О страховании. — Финский вестник, СПб., 1847, т. 13, № 1, стр. 29—34; т. 14, № 2, стр. 40—44.

95. Игра в кости. — Финский вестник, СПб., 1847, т. 15, № 3, стр. 29—32, с 1 табл.

1848

96. Разбор сочинения г-на Сомова, экстраординарного профессора при С.-Петербургском университете, под заглавием: «Аналитическая теория волнообразного движения эфира». — Семнадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1848 года. СПб., 1848, стр. 61—75.

Текст на франц. яз.

То же на русск. яз. в сокращ. виде. — Журн. мин. нар. просв., СПб., 1848, ч. 59, отд. 3, стр. 36—38.

97. Разбор сочинения г-на Давидова под заглавием: «Теория равновесия тел, погруженных в жидкость». Составл. совм. с акад. В. Я. Буняковским. — Семнадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1848 года. СПб., 1848, стр. 107—114.

Текст на франц. яз.

То же на русск. яз. в сокращ. виде. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1848, ч. 59, отд. 3, стр. 36—38.

98. Погрешности при вычислении процентов. — Северное обозрение, СПб., 1848, т. 1, отд. 6, «Смесь», стр. 1—6.

То же. — Журнал Мин. нар. просв., СПб., 1848, ч. 59, отд. 6, стр. 116—121.

1850

99. Разбор сочинения г-на Давидова под заглавием: «Теория капиллярных явлений». Составл. совм. с акад. Э. Х. Ленцем. — Девятнадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1850 года. СПб., 1850, стр. 75—90.

Отзыв Ленца (стр. 75—76) — на нем. яз.; отзыв Остроградского (стр. 77—90) — на франц. яз.

То же на русск. яз. в сокращ. виде. — Журн. мин. нар. просв., СПб., 1850, ч. 67, отд. 3, стр. 10—12.

1851

100. Разбор сочинения г-на профессора Сомова, под заглавием: «Основания теории эллиптических функций». Составл. совм. с акад. В. Я. Буняковским. — Двадцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1851 г. СПб., 1851, стр. 12—15, 151—158.

1854

101. Разбор сочинения адъюнкт-профессора (ныне экстраординарного) при Казанском университете М. Ковальского под заглавием: «Теория движения Нептуна». — Двадцать третье присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 28 мая 1854 года. СПб., 1854, стр. 131—138.

То же в сокращ. виде на франц. яз. — Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1856, t. 14, suppl. 1, p. 8.

1856

102. [Письмо в Парижскую Академию наук с выражением благодарности за избрание в члены-корреспонденты Академии]. — Comptes rendus de l'Acad. des sc., Paris, 1856, t. 42, p. 929.

1858

103. Записка об учреждении эмеритальной кассы. — В кн.: Предположение об учреждении в Морском ведомстве эмеритальной пенсионной кассы. СПб., 1858, стр. 93—101, Прилож. 3 табл.

104. [Способ отделения кратных множителей целой рациональной функции]. — В кн.: В. Беренс. Учебное пособие для военно-учебных заведений. Дифференциальное исчисление. СПб., 1858, стр. 279—284. (См. № 133).

1861

105. Разбор сочинения г. профессора Миндинга под заглавием: «Изыскания, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными». — Тридцатое присуждение утвержденных

П. Н. Демидовым наград. 16 июня 1861 года. СПб., 1861, стр. 11—12, 49—54.

То же. — Отд. оттиск. СПб., 1861, 6 стр.

106. Разбор сочинения профессора Соколова: «Динамика». Составл. совм. с В. Я. Буняковским. — Тридцатое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 16 июня 1861 года. СПб., 1861, стр. 143—150.

То же. — Отд. оттиск. СПб., 1861, 8 стр.

107. Аламбер. Жан-ле-рон д'. — Энциклопедический словарь, составленный русскими учеными и литераторами. СПб., 1861, т. 3, стр. 10—19.

108. Аламберово (д') правило. — Энциклопедический словарь, составленный русскими учеными и литераторами. СПб., 1861, т. 3, стр. 9—10.

1866

109. Письма академика Остроградского к профессору Брашману. — Матем. сборник, М., 1866, т. 1, стр. XXVII—XXXVIII.

Текст на франц. яз.

Пять писем. Четыре письма дат не имеют, второе письмо датировано 2 февраля 1853 г.

То же в русск. перев. в статье Н. Н. Круликовского (1951). (См. № 263).

4. Литература о жизни и деятельности М. В. Остроградского

1825

110. A.-L. Cauchy. Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. [Об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами]. — Extrait du Bull. universel des sciences et de l'Industrie de Férussac. Sc. mathém., Paris, 1825, 8 p.

Упоминание об Остроградском и его работах по математике, стр. 2.

1827

111. A.-L. Cauchy. Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique. [О применении исчисления вычетов к решению задач математической физики]. Paris, 1827, (1), 56 p.

Упоминание об Остроградском и его работах по математике, стр. (1), 6.

1829

112. [Отзыв Лакруа и Коши о работе М. В. Остроградского «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне»]. — Institut de France. Acad. des sc. Procès verbaux des séances de l'Acad. tenues depuis la fondation

de l'Institut jusqu' au mois d'août, 1835, t. 9, année 1828—1831. Hendaye (Basses-Pyrénées), 1921, pp. 278—279.

Заседание 13 июля 1829 г.

113. [Об отзыве А.-Л. Коши на работу М. В. Остроградского «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне». См. № 111]. — Bull. des sc. math., phys. et chim. de Férussac, Paris, 1830, t. 14, p. 155.

1830

114. [Отзыв Пуассона и Араго о «Курсе небесной механики» М. В. Остроградского]. — Institut de France. Acad. des sc. Procès verbaux des séances de l'Acad. tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août, 1835, t. 9, année 1828—1831. Hendaye (Basses-Pyrénées), 1921, pp. 525—527.

Заседание 25 октября 1830 г.

То же под загл. «Rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. Ostrogradski, intitulé «Cours de mécanique céleste». [Доклад о рукописной работе г-на Остроградского под заглавием «Курс небесной механики»]. — Journ. für die reine und ang. Mathem., Berlin, 1831, Bd. 7, ss. 97—101.

115. I. Note sur une intégrale qui se rencontre dans le calcul de l'attraction des sphéroïdes; par M. Ostrogradsky. [Заметка об интеграле, встречающемся в вычислении притяжения сфероидов, г-на Остроградского]. — Mém. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., VI sér., sc. math., phys. et nat., 1831, t. 1, pp. 39—53. (См. № 2). II. Mêmes recherches; par M. Poisson. [Те же исследования г-на Пуассона]. — Mém. de l'Acad. des sc. de Paris, t. 6, pp. 455—463. III. Reflexions sur ces recherches. [Размышления по поводу этих исследований]. — Bull. des sc. math., phys. et chim. de Férussac, Paris, 1830, t. 14, pp. 81—88.

1836

116. С. Б. Математические лекции г. академика Остроградского. Типогр. Н. Греча, СПб., 1836, 31 стр.

1837

117. Новые книги. — Библ. для чтен., СПб., 1837, т. 23, «Литературная летопись», стр. 28—31.

Рецензия на «Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа» Остроградского.

118. Новые книги. — Сев. пчела, СПб., 1837, № 88, 23 апреля, стр. 549.

Краткая рецензия на «Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа» Остроградского.

1838

119. [Рецензия на изданные Корп. кораб. инж. кап. С. Бурачком и лейтенантом С. Зеленым «Лекции алгебр[а]ического и трансцендентного анализа, читанные в Морском кадетском корпусе акад. Остроградским»]. — Седьмое присуждение учрежденных П. Н. Демидовым наград. 17 апреля 1838 года. СПб., 1838, стр. 24—27.

То же. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1838, ч. 19, отд. 3, стр. 132—135.

120. Сомов И. И. Теория определенных алгебраических уравнений высших степеней. М., 1838, VIII, 337, (45) стр., 1 табл.

Об использовании результатов, полученных Остроградским в области алгебраического анализа, стр. III—IV, 295—307.

121. Яниш К. О началах равновесия и движения. СПб., 1838, ч. 1, XVIII, 413 стр.

Отзыв об Остроградском и его ученых трудах по математике, стр. VIII—X.

1839

122. Буняковский В. Я. Лексикон чистой и прикладной математики. СПб., 1839, т. 1, X, 462 стр., с черт.

Роль Остроградского в развитии динамики, стр. 449, 451—452.

1840

123. С. Б[урачек]. Публичные чтения. — Журн. «Маяк соврем. просвещ. и образованности», СПб., 1840, ч. 2, гл. 5, стр. 1—3.

О чтении Остроградским публичных лекций по интегральному исчислению и об их посещаемости.

1841

124. Binet J. Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les formules générales de la dynamique, et dans un système d'équations analogues plus étendues. [О вариациях произвольных постоянных в общих формулах динамики и в системе аналогичных более общих уравнений]. — Journ. de l'École polytechnique, Paris, 1841, t. 17, 28-e cahier, pp. 1—94.

Оценка результатов, полученных Остроградским в работе «О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики» (1847). (См. № 44).

125. Брашман Н. Д. О влиянии математических наук на развитие умственных способностей. Речь, произнесенная в торжественном собрании Московского университета 17 июня 1841 г. 31 стр. (без выходных данных).

126. Сомов И. И. Рассуждение об интегралах алгебраических иррациональных дифференциалов с одною переменною. М., 1841, 168 стр.

1842

127. Соколов И. Д. Исследование некоторых предметов, относящихся к вариационному исчислению. Харьков, 1842, 84 стр.

Об ошибке, замеченной автором у Остроградского. (См. №№ 89, 128, 129).

1843

128. Буняковский В. Я. Замечания на мнимо найденные г. Соколовым: 1) новую теорему из вариационного исчисления и 2) ошибку академика Остроградского. — Журн. «Маяк соврем. просвещ. и образованности», СПб., 1843, т. 8, кн. 15, гл. 4, стр. 37—42.

То же. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1843, ч. 39, отд. 6, стр. 230—232.

129. Соколов И. Д. О статье г. академика Буняковского «Замечания на мнимо найденные г. Соколовым: 1) новую теорему из вариационного исчисления и 2) ошибку академика Остроградского». — Отеч. зап., СПб., 1843, т. 29, отд. 8, стр. 91—97.

1852

130. Веселаго Ф. Очерк истории Морского кадетского корпуса. СПб., 1852, 208, 144 (прилож.), (I—II) стр., с илл.

Упоминание об Остроградском, стр. 197.

1854

131. Смирнов А. Историческое обозрение первого двадцатипятилетия Главного педагогического института (1828—1853). — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1854, ч. 81, февр., отд. 3, стр. 31—46.

Упоминание об Остроградском, стр. 37.

1855

132. Чернышевский Н. Г. [Рецензия на книгу М. В. Остроградского «Учебные руководства для военно-учебных заведений. Руководство начальной геометрии». 1855]. — Современник, 1855, т. 53, № 9, библиогр., стр. 16—17.

То же. — Н. Г. Чернышевский, Полн. собр. соч., М., 1949, т. 2, стр. 739—741.

1858

133. Беренс В. Учебное пособие для военно-учебных заведений. Дифференциальное исчисление. СПб., 1858, (2), 516, III стр., 1 л. черт.

В предисловии указывается, что при составлении книги автор пользовался лекциями и советами Остроградского, перечисляются разделы книги, написав

ные на основании результатов работ Остроградского, излагается его способ отделения равных корней для целой рациональной функции (стр. 279—284) и дается перевод его статьи под заглавием «Способ вариаций» (стр. 475—516). (См. № 53).

1859

134. Соколовский Е. Пятидесятилетие Института и Корпуса инженеров путей сообщения. Исторический очерк. СПб., 1859, XIV, 149 стр., с илл.

Остроградский — преподаватель Института путей сообщения, стр. 41, 43.

1861

135. Б. Политехнические таблицы, сборник перечней по части математики, наук [физических и их приложений, издаваемые под дирекцией гг. Остроградского и Блума. — Моск. ведом., 1861, 20 января, № 16, стр. 124—125.

Рецензия на «Политехнические таблицы».

136. Lamé G. Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. [Лекции по аналитической теории теплоты]. Paris, 1861, XXXI, 414 p.

Упоминание об Остроградском и его работе «О распространении теплоты в призме с основанием равнобедренного прямоугольного треугольника», стр. XIV, 120—121.

137. [О болезни акад. М. В. Остроградского]. — Bull. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1862, t. 4, col. 490.

Протокол заседания физ.-матем. отд. Акад. наук 1(13) ноября 1861 г.

138. Политехнические таблицы, составленные учеными, под дирекциею гг. Остроградского и Блума. — Строитель, механик и технолог, СПб., 1861, т. 3, отд. 3, стр. 387—389.

139. Остроградский А. В. Воспоминания о брате. — Полтавск. губернск. ведом., 1861, 27 декабря, № 52, неофиц. часть, стр. 393—395.

То же. — С.-Петерб. ведом., 1862, 28 января, № 22.

140. Остроградский Михаил Васильевич. (Некролог). — Полтавск. губернск. ведом., 1861, 27 декабря, № 52, неофиц. часть, стр. 391—392.

То же. — С.-Петерб. ведом., 1862, 28 января, № 22.

141. Стеблин-Каменский С. П. Речь, произнесенная на похоронах М. В. Остроградского. — Полтавск. губернск. ведом., 1861, 27 декабря, № 52, неофиц. часть, стр. 392.

То же. — С.-Петерб. ведом., 1862, 28 января, № 22.

142. Todhunter J. A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century. [История развития вариационного исчисления в течение XIX столетия]. Cambridge, 1861.

Об Остроградском и его работах по вариационному исчислению, стр. 111—139. Краткое изложение содержания статьи Остроградского «О дифференциальных уравнениях, относящихся к задаче изопериметров» (см. № 46) и оценка полученных им результатов, стр. 350—352.

1862

143. [Сообщение непременного секретаря в заседании Академии наук 12 января 1862 г. о смерти академика М. В. Остроградского, скончавшегося 20 декабря 1861 г. в г. Полтаве]. — Bull. de l'Acad. des sc. de St.-Pbg., 1863, t. 5, col. 108.

144. Веселовский К. С. Отчет по физико-математическому отделению за 1861 год. — Зап. Акад. наук, СПб., 1862, т. 1, стр. 1—11.

Речь, посвященная памяти Остроградского.

145. Воленс В. Руководства по геометрии. — Учитель, СПб., 1862, № 16, стр. 831—838.

Рецензия на книги Остроградского «Руководство начальной геометрии. Курс II общего класса» (СПб., 1855) и «Курс III общего класса» (СПб., 1857), стр. 836—837. (См. № 69).

146. Рахманинов И. И. Общая теория относительного движения. — Вестн. матем. наук, Вильно, 1862, т. 1, № 7—8, стр. 53—63.

Об Остроградском, стр. 53—54.

147. Список сочинений М. В. Остроградского. — Зап. Акад. наук, СПб., 1862, т. 1, кн. 1, стр. 46—50 (64 назв.)

1863

148. Poggendorff J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch. Leipzig, 1863, Bd. 2, col. 337—338, библиогр. (22 назв.).

149. Сомов. И. И. Очерк жизни и ученой деятельности Михаила Васильевича Остроградского. — Зап. Акад. наук, 1863, т. 3, кн. 1, стр. 1—29, прилож. Заседание совета Харьковского университета 1820 г. 17 ноября, стр. 27—29.

1864

150. Веселовский К. С. Историческое обозрение трудов Академии наук на пользу России в прошлом и текущем столетиях. Торжественное собрание Академии наук 29 декабря 1864 года. СПб., 1865, стр. 27—64.

О научных заслугах Остроградского, стр. 36.

151. Настольный словарь для справок по всем отраслям знания. СПб, 1864, т. II, стр. 1115.

1865

152. Коргуев П. Описание празднества, данного в честь академика В. Я. Буняковского 30 декабря 1864 г. Кронштадт, 1865, 69 стр.

Упоминание об Остроградском, стр. 12, 32, 36, 39, 62—63, 66—67.

1867

153. Слудский Ф. А. О начале наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1867, т. 2, вып. 1, стр. 45—50.

154. Талызин М. И. О начале наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1867, т. 2, вып. 2, стр. 143—154.

1869

155. Деларю Д. Курс дифференциального исчисления и теории алгебраических функций. Посвящается памяти Михаила Васильевича Остроградского. СПб., 1869. Т. 1, XVI, 212 стр.

Значение Остроградского в истории развития математики в России, стр. XI—XVI.

156. Максимовский М. Исторический очерк развития Главного инженерного училища. 1819—1869. СПб., 1869, 388 стр.

О преподавательской деятельности Остроградского в Главном инженерном училище, стр. 107—109.

1870

157. Catalogue of scientific papers (1800—1863). London, vol. IV, 1870, pp. 709—710 (42 назв.); vol. XII, 1902, p. 551 (1 назв.); vol. XVII, 1921, p. 647 (5 назв.).

158. Платов А. и Л. Кирпичев. Исторический очерк образования и развития Артиллерийского училища (1820—1870). СПб., 1870. XI, 274 стр. Прилож. 180 стр., с илл.

Об Остроградском как преподавателе математики в Артиллерийском училище, стр. 148—153, 189, 225, 237, 243, 263, 265—266, 268.

159. Слудский Ф. А. Заметка о начале наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1870, т. 4, вып. 3, стр. 225—230.

160. Соколов И. Д. О начале наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1870, т. 5, вып. 2, стр. 179—188.

1871

161. Будаев Н. Теоретическая механика. Первая часть. Механика материальной точки. СПб., 1871. XVI, 523 стр., 1 л. черт.

1872

162. Сомов И. И. Замечания, относящиеся к началу наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1872, т. 5, вып. 4, стр. 303—322.

163. Chemiot V. Tableau général méthodique et alphabétique des matières contenues dans les publications de l'Académie des sciences de St.-

Pétersbourg depuis sa fondation. 1-re partie. Publication en langues étrangères. [Общий методический и алфавитный указатель материалов, напечатанных в изданиях С.-Петербургской Академии наук со времени ее основания. Часть 1-я. Издание на иностранных языках]. St.-Pbg., 1872, 488 р.

Библиогр. трудов Остроградского (52 назв.).

1875

164. Шемиот В. П. Систематический и алфавитный указатель статей, помещенных в периодических изданиях и сборниках Академии наук, а также сочинений, изданных Академией отдельно со времени ее образования по 1872 г. включительно. Ч. 2. Сочинения на русском языке. СПб., 1875, 402 стр.

Библиогр. трудов Остроградского (9 назв.).

1876

165. Остроградский Михаил Васильевич. — Русск. энциклопед. словарь, издаваемый проф. С.-Петербургского университета И. Н. Березиным, СПб., 1876, отд. 3, т. 3, стр. 316—317.

166. Чириков Г. С. Тимофей Федорович Осиповский, ректор Харьковского университета. — Русская старина, СПб., 1876, т. 17, стр. 463—490.

О студенческих годах Остроградского, стр. 483—490.

1878

167. Остроградский Михаил Васильевич. — Всенаучный (энциклопед.) словарь В. Клюшникова, СПб., 1878, т. 2, стр. 335.

1879

168. Латышев В. А. Исторический очерк русских учебных руководств по геометрии. — Педагогич. сборник, издаваемый при Главн. управл. военно-учебн. заведений, СПб., 1879, кн. 6, стр. 652—680.

О книгах Остроградского «Руководство начальной геометрии» (1855, 1857 и 1861) и о рецензиях на них, стр. 652—658.

1880

169. Сабинин Е. Ф. О начале наименьшего действия. — Речи и протоколы VI съезда русских естествоиспытателей и врачей в С.-Петербурге. СПб., 1880, стр. 148—155.

1881

170. Сабинин Е. Ф. Михаил Васильевич Остроградский. Речь, произнесенная ординарн. профессором Е. Ф. Сабининым в торжественном собрании Новороссийского университета 30 августа 1881 г. Одесса, 1881, 32 стр.

Прилож. — список сочинений Остроградского (64 назв.).

То же. — В кн.: Зап. Новоросс. унив., Одесса, 1882, т. 33, стр. 41—72.

То же с некотор. измен. и дополн. под загл. «Михаил Васильевич Остроградский. (По поводу столетия со дня его рождения)». — В кн.: Матем. сборник, М., 1902, т. 22, вып. 4, стр. 499—531, 1 л. портр.

То же. — Отд. оттиск. М., 1901, 33 стр.

171. Сабинин Е. Ф. О начале наименьшего действия. Зап. Новоросс. унив., Одесса, 1881, т. 32, стр. 227—278.

1882

172. Преображенский В. О начале наименьшего действия (по поводу статьи профессора Е. Ф. Сабинина). СПб., 1882, 41 стр. (См. № 169).

1883

173. Сабинин Е. Ф. Дополнение к статье «О начале наименьшего действия» (по поводу рецензии проф. Преображенского). — Зап. Новоросс. унив., Одесса, 1883, т. 35, стр. 381—413. (См. №№ 169, 170).

1889

174. Бобылев Д. О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа. СПб., 1889, 95 стр.

175. Кирпичев Л. Начала баллистики. Заметки. СПб., 1889, 312 стр.

Оценка изысканий Остроградского в области баллистики, стр. 12. 131—132, 133.

1890

176. Щелков И. П. Из истории Харьковского университета. — Журн. Мин. нар. просв., СПб., 1890, октябрь, ч. 271, стр. 358—385.

Об Остроградском, стр. 380—381.

1891

177. Зинин Н. Н. О формулах Остроградского в теории кратных интегралов и об их приложении. — Матем. сборник, М., 1891, т. 15, вып. 4, стр. 645—682.

178. Остроградский Михаил Васильевич. — Энциклопедия военных и морских наук. Под ред. ген.-лейт. Леера. СПб., 1891, т. 5, стр. 504.

1893

179. Панаев В. А. Воспоминания. — Русская старина, СПб., 1893, октябрь, стр. 63—89; ноябрь, стр. 395—412; декабрь, стр. 539—568.

О педагогической деятельности Остроградского, стр. 78—87, 395, 407—412, 553, 557.

1895

180. Воспоминания А. В. Эвальда. — Историч. вестн. 1895, т. 61, сентябрь, стр. 573—598.

Воспоминание об Остроградском, стр. 577—582.

1896

181. Д[урново] А. В. Очерки из жизни Т. Ф. Эйдригевича. — Журн. Мин. путей сообщ., СПб., 1896, кн. 4, стр. 131—162.

Об Остроградском как преподавателе Института инженеров путей сообщения, стр. 142—144.

182. Энве. Тридцатипятилетие кончины Остроградского. — Газ. «Котлин», 1896, 21 декабря, № 263, стр. 3.

1897

183. Бобылев Д. Остроградский Михаил Васильевич. — Энциклопед. словарь Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона. СПб., 1897, т. 22, стр. 360.

184. Бобынин В. В. Остроградский М. В. — Энциклопед. словарь Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона. СПб., 1897, т. 22, стр. 360—362.

185. Жуковский Н. Е. О начале наименьшего действия. — Матем. сборник, М., 1897, т. 9, вып. 3, стр. 574—581.

То же. — Соч. Н. Е. Жуковского, М., 1912, т. 1, стр. 171—178.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1937, т. 1, стр. 91—97.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1950, т. 1, стр. 51—57.

1901

186. Васильев А. В. М. В. Остроградский. — Изв. физ.-мат. общ. при Казанск. унив., Казань, 1901, т. 11, № 4, стр. 3—10

То же. — Отд. оттиск. Казань, 1904, 8 стр.

187. Михаил Васильевич Остроградский под надзором полиции. — Русская старина, СПб., 1901, ноябрь, стр. 341—342.

188. Остроградский Михаил Васильевич. — Энциклопед. словарь под ред. М. М. Филиппова. СПб., 1901, т. 2, стлб. 2400.

189. Памяти М. В. Остроградского. — Вестн. опытн. физики и элементарн математики, Одесса, 1901, стр. 97—101.

То же. — Отд. оттиск. Одесса, 1901, 5 стр.

190. Трипольский П. И. Михаил Васильевич Остроградский. (По поводу столетия со дня его рождения). — Историч. вестн., 1901, декабрь, стр. 1023—1061, портр. и 1 фот.

1902

191. Ермаков В. П. [Речь на заседании, посвященном столетию со дня рождения М. В. Остроградского]. — В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 87—92. (См. № 200).

192. Жуковский Н. Е. М. В. Остроградский. — В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 28—31. (См. № 200).

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1937, т. 9, стр. 389—391, портр.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1950, т. 7, стр. 220—222.

193. Жуковский Н. Е. Некоторые черты из жизни М. В. Остроградского. — Матем. сборник, М., 1902, т. 22, вып. 4, стр. 532—539, 4 фот.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1937, т. 9, стр. 392—397.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1950, т. 7, стр. 223—228.

194. Жуковский Н. Е. Ученые труды М. В. Остроградского по механике. — Матем. сборник, М., 1902, т. 22, вып. 4, стр. 555—573.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1937, т. 9, стр. 398—414.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М.—Л., 1950, т. 7, стр. 229—246.

195. Лахтин Л. К. Работы М. В. Остроградского в области анализа. (По поводу столетия со дня его рождения). — Матем. сборник, М., 1902, т. 22, вып. 4, стр. 540—554.

196. Ляпунов А. М. О заслугах М. В. Остроградского в области механики. — В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 115—118. (См. № 200).

197. Стеклов В. А. О работах М. В. Остроградского в области математической физики. — В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 118—127. (См. № 200).

198. Тихомандрицкий М. А. Очерк ученых трудов М. В. Остроградского в области чистой математики. — В кн.: П. И. Трипольский· М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 92—115. (См. № 200).

199. Трипольский П. И. Очерк жизни и учено-педагогической деятельности М. В. Остроградского. — В кн.: П. И. Трипольский. М. В. Остроградский. Полтава, 1902, стр. 47—86. (См. № 200).

200. Трипольский П. И. Михаил Васильевич Остроградский. Празднование столетия дня его рождения полтавским кружком любителей физико-математических наук. Полтава, 1902, (I—II), 138, (1) стр.

Очерки жизни, ученой и педагогической деятельности Остроградского, доклады, речи и поздравительные телеграммы. Список трудов Остроградского (66 назв.), его портрет, факсимиле и фотография дома, где он родился.

1903

201. Алексеев В. Г. Михаил Васильевич Остроградский. (По поводу столетия со дня его рождения). — Сборник Учено-литер. общ. при Юрьевск. унив., Юрьев, 1903, т. 6, стр. 122—155, с портр.

Читано в заседании Общества 15 декабря 1901 г.

1904

202. Багалей Д. И. Опыт истории Харьковского университета (по неизданным материалам). Харьков, 1904, IV, 1136 стр., 5 л. портр.

Об Остроградском — студенте Харьковского университета, стр. 114, 117, 119, 641, 642, 1112.

203. Бооль В. Г. Воспоминания педагога. Русская старина, СПб., 1904, № 9, стр. 578—593.

Воспоминания об Остроградском и его лекциях в Артиллерийской академии, стр. 581—584.

204. Никитенко А. В. Моя повесть о самом себе и о том, «чему свидетель в жизни был». Записки и дневник. 1804—1877. СПб., 1904, т. 1 I), 629 стр.

То же под загл. «Дневник (1826—1857)» (Т. 1, ГИХЛ, М., 1955, XLIV, 539 стр.).

Об Остроградском: в изд. 1904 г.—стр. 280, 446, 448, 453, 455, 509, 511; в изд. 1955 г.—стр. 189, 399, 402, 408, 410.

205. Павловский И. Ф. Математик М. В. Остроградский под надзором полиции. — Киевск. старина, 1904, т. 87, отд. 2, стр. 45—46.

То же. — Труды Полтавск. учен. архивн. комиссии, 1905, вып. 1, стр. 100—102.

206. Старый артиллерист. Артиллерийское училище в 1845 году. — Русская старина, СПб., 1904, кн. 6, стр. 591—620.

Об Остроградском как преподавателе Артиллерийского училища, стр. 593—594.

1905

207. Бобынин В. В. Остроградский Михаил Васильевич. — Русск. биогр. словарь, 1905, стр. 452—457.

208. Гродский Г. Михайловские артиллерийские училище и академия в XIX столетии. Исторический очерк их деятельности как артиллерийских учебных заведений. Часть 1. 1820—1881 гг. СПб., 1905, (2), 404 стр. с илл.

Об Остроградском как преподавателе Михайловского артиллерийского училища, стр. 74—76, 136—138, портр.

1907

209. Ahrens W. Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Leipzig, 1907, XX, 283 S. mit 2 Bildn.

Упоминания об Остроградском, стр. 31, 33, 37, 47, 52, 57, 60—62, 67, 74, 76, 78, 83. 87, 88, 91, 92, 94, 100, 109, 143, 161, 164, 228, 234.

210. Петров П. В. Столетие военного министерства. (1802—1902). Т. X. Главное управление военно-учебных заведений. (Исторический очерк). Ч. 2, СПб., 1907, 163 стр.

Об Остроградском, стр. 32, 134.

211. Фирсов [Рускин] Н. Н. Воспоминания о П. Л. Лаврове. — Историч. вестн., т. 107, СПб., 1907, январь, стр. 95—119.

Об Остроградском как преподавателе математики, стр. 99—101.

1908

212. Физико-математический факультет Харьковского университета за первые сто лет его существования. (1805—1905). Под ред. проф. И. П. Осипова и проф. Д. И. Багалея, Харьков, 1908, VI, 357 стр. (первая пагин.); XIV, 248 стр. (вторая пагин.), 17 л. портр.

Об Остроградском, стр. 27, 32—34, 44, 111—113, 145 (первая пагин.). портр.

1912

213. Остроградский Михаил Васильевич. — В кн.: И. Ф. Павловский. Краткий биографический словарь ученых и писателей Полтавской губернии с половины XVIII века. Полтава, 1912, 141 стр., портр.

1915

214. Ушаков Л. Корпусное воспитание при Николае I. — Голос минувшего, 1915, № 6, стр. 90—133.

Об Остроградском, стр. 133.

1916

215. Некрасов А. Остроградский Михаил Васильевич. — Энциклопед. словарь «Гранат», 1-е изд., М., 1916, т. 30. стлб. 705—706.

216. Остроградский Михаил Васильевич. — Новый энциклопед. словарь, Пгр., 1916, т. 29, стлб. 855—856.

1921

217. Васильев А. В. Михаил Васильевич Остроградский. — В кн.: Русская наука. Отд. II. «Математика» (1725—1826—1863), вып. 1, Пгр., 1921, стр. 26—35.

1936

218. Динзе О. В. и К. И. Шафрановский. Математика в изданиях Академии наук. 1728—1935. Библиографический указатель. Под ред. чл.-корр. Акад. наук СССР проф. В. И. Смирнова, с предисловием акад. А. Н. Крылова. Изд. АН СССР, М.—Л., 1936, 315 стр.

Перечень работ Остроградского (61 назв.).

1937

219. Жуковский Н. Е. Об ударе абсолютно твердых тел. — Полн. собр. соч., М.—Л., 1937, т. 1, стр. 241—260.

То же. — Полн. собр. соч. Н. Е. Жуковского, М. — Л., 1948, т. 1, стр. 184—202.

220. Кузнецов Б. Г. Лобачевский и его современники. — Под знаменем марксизма, М.—Л., 1937, № 7, стр. 137—157.

Об Остроградском, его математических работах и его отношении к творчеству Лобачевского, стр. 149—150.

1939

221. Остроградский Михаил Васильевич (1801—1861). — БСЭ, 1939, т. 43, стр. 514—515.

1940

222. Кузнецов Б. Г. Очерки истории русской науки. Изд. АН СССР, М.—Л., 1940, 172 стр.

Об Остроградском, стр. 54—57, портр.

223. Морев В. Сто лет назад. — Математика в школе, 1940, № 2, стр. 66—69.

1943

224. Крылов А. Н. Мысли и материалы о преподавании механики в высших технических учебных заведениях СССР. Изд. АН СССР, М.—Л., 1943, 75 стр.

«Руководство начальной геометрии» Остроградского, стр. 27—29.

225. Крылов А. Н. Ньютон и его значение в мировой науке. 1643—1943. Изд. АН СССР, М.—Л., 1943, 39 стр. с илл.

Об Остроградском, стр. 23, 28.

1944

226. Файдель Э. П. и К. И. Шафрановский. Печать в России о трудах Н. И. Лобачевского (1834—1856). — Вестн. Акад. наук СССР, М., 1944, № 3, стр. 127—131.

Об отношении Остроградского к работам Лобачевского по геометрии, стр. 128—129.

1945

227. Александров П. С. Развитие математики в нашей стране. — Вестн. Акад. наук СССР, М., 1945, № 5—6, стр. 35—55.

Об Остроградском, стр. 37—38.

228. Крылов А. Н. Мои воспоминания. Изд. АН СССР, М.—Л., 1942, 239 стр.; М.—Л., 1945, 555 стр.

Упоминания об Остроградском: в изд. 1942 г. — стр. 231—234; в изд. 1945 г. — стр. 342—345.

229. Рабинович И. М. Деятели русской строительной механики XIX столетия и Военно-инженерная академия. — Вестн. Военно-инж. акад. им. В. В. Куйбышева, М., 1945, вып. 43, стр. 3—18.

Об Остроградском, стр. 4—5, портр.

230. Смирнов В. И. Русская математика XIX и XX веков. — Природа, Л., 1945, № 3, стр. 17—23.

Об Остроградском, стр. 17.

1946

231. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гос. изд. техн.-теорет. литер., М.—Л., 1946, 247 стр. с илл. Список цитир. работ (37 назв.).

232. Идельсон Н. И. Академик М. В. Остроградский и его система аналитической механики. — Тезисы докладов научной сессии Лен. гос. унив. по секции математических наук, Л., 1946, стр. 16—17.

233. Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 1. Гос. изд. техн., теорет. лит., М.—Л., 1946.

Об отношении М. В. Остроградского к творчеству Н. И. Лобачевского, стр. 406—410.

1947

234. Александров П. С. Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку. — Учен. зап. Моск. гос. унив. им. М. В. Ломоносова, М., 1947, вып. 91; Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры, т. 1, кн. 1, стр. 3—33.

235. Лейбензон Л. С. Николай Егорович Жуковский. Изд. АН СССР, М.—Л., 1947, 184 стр.

Остроградский как предшественник Жуковского; его труды в области механики, стр. 58—60, портр.

236. Михаил Васильевич Остроградский. — В кн.: Л. Гумилевский. Русские инженеры. Изд. «Молодая гвардия», М., 1947, стр. 166—169, 190, 202, 216, 272, портр.

237. Четаев Н. Г. Работы русских ученых по механике в Академии наук. — В кн.: 220 лет Академии наук. Юбилейная сессия Академии наук СССР. 15 июня — 3 июля 1945 г. Т. 2, Изд. АН СССР, М.—Л., 1947, стр. 498—506.

Краткий обзор научных достижений Остроградского, стр. 500.

1948

238. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. — В кн.: Люди русской науки, М.—Л., 1948, т. 1, стр. 99—105.

239. Делоне Б. Н. Математика и ее развитие в России. Всесоюзн. общ. по распр. политич. и научн. знаний, М., 1948, 16 стр. с илл., библиогр. (20 назв.).

Краткое упоминание об Остроградском, стр. 7.

240. Данилевский В. В. Русская техника. Л., 1948, 547 стр.

Об Остроградском и его работах в области математики, механики, баллистики, математической физики и т. д., стр. 202; об участии в работах комиссии, учрежденной для приложения электромагнитной силы к движению машин по способу Б. С. Якоби, стр. 347, 348, 491.

241. Каган В. Ф. Лобачевский. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, 506 стр. с илл., библиогр. (стр. 490—501).

Отзыв Остроградского о работе Лобачевского «О началах геометрии», стр. 251—261.

242. Космодемьянский А. А. Очерки по истории теоретической механики в России. — Учен. зап. Моск. гос. унив. им. М. В. Ломоносова, М., 1948, т. 2, вып. 122, стр. 193—296.

Об Остроградском и его научных достижениях, стр. 217—221.

243. Модзалевский Л. Б. Материалы для биографии Н. И Лобачевского. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, 823 стр.

Об отношении Остроградского к математическим воззрениям Лобачевского, стр. 331—337, 776.

244. Юшкевич А. П. Математика и ее преподавание в России в XVII — XIX вв. — Математика в школе, М., 1948, № 3, стр. 1—7, портр.

1949

245. Вавилов С. И. Речь при открытии мемориальных досок. — Вопр. истории отеч. науки. М.—Л., 1949, стр. 899—901.

246. Кутателадзе С. С. и Р. В. Цукерман. Очерк развития теории теплоты в работах русских ученых XVIII и XIX столетий. Гос. энергетич. изд., М.—Л., 1949, 156 стр. с илл.

Об Остроградском, стр. 137—138, 151.

247. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. Гос. изд. техн.-теорет. литер., М.—Л., 1949, 663 стр.

Критерий знака полного приращения работы сил у Остроградского, стр. 453—455.

248. М. Ш. М. В. Остроградский. — Вестн. машиностроения, М., 1949, № 5, стр. 56—67 портр.

1950

249. Лазарев П. П. Очерки истории русской науки. Под ред. акад. С. И. Вавилова и проф. М. П. Воларовича. Изд. АН СССР, М.—Л., 1950, 248 стр. с илл.

Остроградский — продолжатель трудов Эйлера, стр. 16.

250. Марон И. А. Академик М. В. Остроградский как организатор преподавания математических наук в военно-учебных заведениях России. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1950, вып. 3, стр. 197—340, портр.

251. Моисеев Н. Д. Общий очерк развития механики в России и в СССР. — В кн.: Механика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. Сборник статей под ред. В. З. Власова, В. В. Голубева и Н. Д. Моисеева. Гос. изд. техн.-теорет. литер., М.—Л., 1950, стр. 11—53, библиогр. на стр. 53—57 (134 назв.).

Основные достижения Остроградского в области русской механики, стр. 18, 19, 26.

1951

252. Выдающийся русский математик. — Вечерн. Москва, 1951, 23 октября.

253. Выставка, посвященная М. В. Остроградскому. — Смена, 1951, 7 октября.

254. Гнеденко Б. В. Выдающийся русский ученый. (К 150-летию со дня рождения математика М. В. Остроградского). — Красная звезда, 1951, 23 сентября.

255. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. Успехи матем. наук, М., 1951, т. 6, вып. 5, стр. 3—25, портр.

256. Гнеденко Б. В. О работах М. В. Остроградского по теории вероятностей. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1951, вып. 4, стр. 99—123.

257. Гнеденко Б. В. и И. А. Марон. Выдающийся ученый и педагог. К 150-летию со дня рождения М. В. Остроградского. — Учительск. газ., 1951, 22 сентября.

258. Гнеденко Б. В. и Е. Я. Ремез. М. В. Остроградський. — Вісн. Акад. наук УРСР, 1951, № 9, стр. 61—70.

259. Гнеденко Б. В. и Е. Я. Ремез. Попередне повідомлення про рукописи М. В. Остроградського. До 150-річчя з дня народження М. В. Остроградського. 1801—1951. — Вісн. Акад. наук УРСР, 1951, № 8, стр. 52—63.

260. Григорьян А. Т. Сто пятьдесят лет со дня рождения одного из крупнейших русских ученых — Михаила Васильевича Остроградского. — Вестн. машиностроения, М., 1951, № 9, стр. 80—83, библиогр. (12 назв.).

261. Депман И. Я. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского. Историко-матем. исследования, М.—Л., 1951, вып. 4, стр. 160—170.

262. Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. Изд. АН СССР, М.—Л., 1951, 575 стр.

Упоминание об Остроградском, стр. 53.

263. Кругликовский Н. Н. К истории установления Остроградским интегрального вариационного принципа механики. Учен. зап. Томск. пед. инст., Томск, 1951, т. 8, стр. 207—215, литер. на стр. 215—216 (19 назв.).

Прилож. письмо М. В. Остроградского к проф. Н. Д. Брашману, стр. 217—219.

264. Крупный русский математик. — Правда, 1951, 25 сентября.

265. Марон И. А. Общие педагогические взгляды М. В. Остроградского. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1951, вып. 4, стр. 124—159.

266. Марон И. А. Педагогическое наследие М. В. Остроградского. Математика в школе, 1951, № 2, стр. 13—22.

267. Михаил Васильевич Остроградский. К 150-летию со дня рождения. — Укр. матем. журн., 1951, № 3, стр. 235—239, портр.

268. Путята Т. В. и Б. Н. Фрадлин. Михайло Васильевич Остроградський, до 150-річчя з дня нарождения. Киев, 1951, 87 стр., портр., библиогр. трудов Остроградского (80 назв.) и литер. о нем (41 назв.).

269. Рабинович Ю. Л. Интегральная теорема М. В. Остроградского. — Успехи матем. наук, М., 1951, т. 6, вып. 5, стр. 26—32.

270. Рвачева Е. Л. и М. Е. Темченко. До 150-річчя з дня нарождения академіка М. В. Остроградського. — Вісн. Акад. наук УРСР, 1951, № 11, стр. 73—74.

Заседание юбилейной сессии отд. физ.-мат. и хим. наук АН УССР 24—25 сентября 1951 г. в Киеве, посвящ. 150-летию со дня рождения Остроградского.

271. Ремез Е. Я. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел. — Успехи матем. наук, М., 1951, т. 6, вып. 5, стр. 33—42.

272. Ремез Е. Я. О математических рукописях академика М. В. Остроградского. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1951, вып. 4, стр. 9—98, портр. и 3 фот.

273. Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России в XIX в. и в начале XX в. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1951, вып. 4, стр. 235—451.

О книге Остроградского «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа» (см. № 60), стр. 273—282.

1952

274. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. Гос. изд. техн.-теорет. литер., М., 1952, 519 стр. с илл., литер. на стр. 499—509.

Об Остроградском, стр. 13—59, портр.

275. Гнеденко Б. В. Выдающийся русский ученый М. В. Остроградский. Изд. «Знание», М., 1952, 25 стр., портр., литер. (5 назв.).

276. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. Очерки жизни, научного творчества и педагогической деятельности. Гос. изд. техн.-теорет. литер., М., 1952, 332 стр. с илл., 3 портр., прилож. библиогр. трудов Остроградского (85 назв.) и список литературы о нем (50 назв.).

В книге опубликованы статьи М. В. Остроградского: 1) «Заметка по теории теплоты»; 2) «О преобразовании переменных в кратных интегралах»; 3) «Заметка о линейных дифференциальных уравнениях».

Рец.: 1) В. Н. Молодший. Математика в школе, 1953, № 5, стр. 74—76; 2) А. П. Юшкевич. Успехи матем. наук. М., 1954, т. 9, вып. 1, стр. 155—158.

277. Делоне Б. Н. М. В. Остроградский и его работы в области математического анализа. — Природа, М., 1952, № 2, стр. 77—81, портр.

278. Круликовский Н. Н. Михаил Васильевич Остроградский. Доклад, прочитанный в Томск. государственном педагогическом институте по случаю 150-летия со дня рождения М. В. Остроградского. — Учен. зап. Томск. гос. пед. инст., Томск, 1952, т. 9, стр. 334—347.

279. Путята Т. В. и Б. Н. Фрадлін. Діяльність видатних механіків на Україні. Держав. видавництво технич. літер. УРСР, Київ, 1952, 265, (2) стр. с илл.

Об Остроградском как основоположнике математической школы и результатах его научных достижений, стр. 49—57.

280. Рвачева Е. Л. Сессия отделения физико-математических и химических наук Академии наук УССР, посвященная 150-летию со дня рождения М. В. Остроградского. — Украинск. матем. журн., Киев, 1952, т. 4, № 1, стр. 100—104.

281. Рыбкин Г. Ф. Материалистические черты мировоззрения М. В. Остроградского и его учителя Т. Ф. Осиповского. — Успехи матем. наук, М., 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 123—144.

282. Сто пятьдесят лет со дня рождения Михаила Васильевича Остроградского. — Успехи матем. наук, М., 1952, т. 7, вып. 1 (47), стр. 203—205.

283. Фихтенгольц Г. М. О преобразовании переменных в кратных интегралах. — Историко-матем. исследования, М.—Л., 1952, вып. 5, стр. 241—268.

Об Остроградском, стр. 257—266.

284. Штокало И. З. Труды М. В. Остроградского по математической физике. — Украинск. матем. журн., Киев, 1952, т. 4, № 1, стр. 3—24.

1953

285. Григорьян А. Т. Михаил Васильевич Остроградский — выдающийся ученый. Пособие для учителей. Учпедгиз, М., 1953, 40 стр.

286. Отрадных Ф. П. Михаил Васильевич Остроградский. Изд. Лен. гос. унив. им. А. А. Жданова, Л., 1953, 102 стр., портр., библиогр. (119 назв.).

Реф.: Е. Я. Ремез. — Реферативн. журн. «Математика», М., 1954, № 5, стр. 95.

287. Прудников В. Е. О статьях П. Л. Чебышева, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского и И. И. Сомова в «Энциклопедическом словаре, составленном русскими учеными и литераторами». — Историко-матем. исследования, М., 1953, вып. 6, стр. 223—237.

288. Свешников А. Г. Об одной работе М. В. Остроградского. — Успехи матем. наук, М., 1953, т. 8, вып. 1 (53), стр. 101—102.

То же в переводе на румынск. яз. под загл. «Despre o lucrare a lui M. V. Ostrogradschi». — An. Rom.-Sov., ser. mat.-fiz., 1954, № 1, pp. 19—20.

О работе Остроградского «Заметка по теории теплоты». (См. №№ 4, 6).

289. Timoshenko S. P. History of strength of materials with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. [История науки о сопротивлении материалов с кратким обзором истории теории упругости и теории конструкций]. New-York—Toronto—London, 1953, 452 p., ill.

Об Остроградском, стр. 112—142, 285, портр.

1954

290. Антропова В. И. Михаил Васильевич Остроградский. — Вестн. высш. школы, 1954, № 9, стр. 49—56.

291. Кострюков К. И. Об одной попытке издать труды Леонарда Эйлера. — Историко-матем. исследования, М., 1954, вып. 7, стр. 630—631.

Участие Остроградского в предполагаемом издании трудов Эйлера. Прилож. фот. последней страницы письма Остроградского к П. Н. Фуссу от 21 марта 1844 г. и русский перевод этого письма, стр. 634—637.

292. Макарова В. И. Забытый портрет М. В. Остроградского. — Труды Инст. истории естествозн. и техн., изд. АН СССР, М., 1954, т. I, стр. 316—319, портр.

293. Прудников В. Е. Четыре письма к М. В. Остроградскому. Историко-матем. исследования, М., 1954, вып. 7, стр. 716—719, 1 фот.

Письма А.-Л. Коши, Г. Ляме, Ш. Штурма и Ж.-Ф. Бине.

294. Ракчеев Е. Н. Развитие теории упругости в России в XIX веке. Автореф. канд. дисс. Изд. Моск. гос. унив. им. М. В. Ломоносова, М., 1954, 7 стр.

1955

295. Антропова В. И. Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского. — Труды Инст. истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1955, т. 5, стр. 304—320.

296. Остроградский Михаил Васильевич. — БСЭ, 2-е изд., т. 31, 1955, стр. 346—347, с портр.

297. Харьковский государственный университет им. А. М. Горького за 150 лет. 1955, 386 стр.

Остроградский — студент Харьк. университета, стр. 3, 17, 28, 37, 54, 153, портр.

1956

298. Гнеденко Б. В. и И. Б. Погребысский. О развитии математики на Украине. Историко-матем. исследования, М., 1956, вып. 9, стр. 403—426.

Об Остроградском, стр. 407, 409, 413, 424, 426.

299. Гнеденко Б. В. и И. И. Гихман. Развитие теории вероятностей на Украине. Историко-матем. исследования, М., 1956, вып. 9, стр 477—536.

Об Остроградском, стр. 478—480, 532.

300. Гуменний П. В. Про один спосіб наближеного знаходження комплексних коренів алгебраічного рівняння. (Развинуто алгоритми з рукописно спадщини М. В. Остроградського). Наукові записки Київськ. пед. інст., т. XIX (фіз. — матем. сер., № 6), Київ, 1956.

301. Григорьян А. Т. Из истории интегральных вариационных принципов механики. Вопр. истории естествозн. и техн., М., 1956, вып. 1, стр. 24—33.

302. Марчевский М. Н. Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879—1954). Историко-матем. исследования, М., 1956, вып. 9, стр. 613—666.

Об Остроградском, стр. 614—615.

303. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. Пособие для учителей. Гос. учебно-пед. изд. Мин. просв. РСФСР, М., 1956, 640 стр.

Об Остроградском, стр. 254—291.

1957

304. Антропова В. И. К истории интегральной теоремы М. В. Остроградского. Труды Инст. истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1957, т. 17, стр. 229—269.

305. Антропова В. И. О работах Фурье, Остроградского и Пуассона по теплопроводимости в жидкостях. Вопр. естествозн. и техн., М., 1957, вып. 3, стр. 49—61.

306. Гнеденко Б. В. и И. Б. Погребысский. О некоторых задачах истории математики. Украинск. матем. журн., 1957, т. IX, № 4, стр. 359—368.

Об Остроградском, стр. 362, 364.

307. История естествознания в России. Изд. Акад. наук СССР, М., 1957, т. 1 (ч. I — 497 стр., ч. II — 380 стр.).

Об Остроградском: ч. I — стр. 244, 246, 250, 254, 261, 272, 279, 280, 295; ч. II — стр. 9, 25, 27, 35—37, 61, 69, 71, 72, 74—77, 79—100, 103, 128, 153, 355, 357.

308. Хилькевич Э. К. Об одном замечании М. В. Остроградского по поводу первой аксиомы геометрии. Вопр. естествозн. и техн., М., 1957, вып. 5, стр. 162—164.

309. Цыганова Н. Я. Работы русских ученых XIX в. по исследованию начала наименьшего действия и начала Гамильтона-Остроградского. Труды Инст. истории естествозн. и техн. АН СССР, М., 1957, т. 19, стр. 462—537.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Математический анализ

Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов 9
Заметка о методе последовательных приближений 38
О преобразовании переменных в кратных интегралах 45
Заметка о линейных дифференциальных уравнениях 53
Об интегрировании рациональных дробей 56
Заметка о равных множителях целых полиномов 106

Математическая физика

Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне 111
Заметка по теории теплоты 131
Вторая заметка по теории теплоты 142
Выдержка из протокола Санкт-Петербургской Академии наук от 23 сентября 1829 года 146
Об уравнении, относящемся к распространению теплоты внутри жидкости 148
Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругой среды 154
Об интегрировании уравнений с частными производными, относящихся к малым колебаниям упругих тел 162

Механика

Общие соображения относительно моментов сил 205
О мгновенных перемещениях систем, подчиненных переменным условиям 230
О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции 270
О вариациях произвольных постоянных в задачах динамики 280
Об интегралах общих уравнений динамики 297
Письма академика Остроградского профессору Брашману 312
К общей теории удара 324

Приложения

Послесловие. *Акад. В. И. Смирнов* 377
Очерк жизни, научного творчества и педагогической деятельности М. В. Остроградского. *Действительный член АН УССР Б. В. Гнеденко и доц. И. А. Марон* 380

Примечания 458

Библиографический указатель основных печатных и литографированных трудов М. В. Остроградского и литературы о нем 541

1. Научные труды М. В. Остроградского 541
2. Печатные и литографированные курсы лекций, учебники, учебные программы и статьи, относящиеся к педагогической деятельности М. В. Остроградского 551
3. Отзывы, доклады, научно-популярные статьи, письма и т. д. . 554
4. Литература о жизни и деятельности М. В. Остроградского . . 559

МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ ОСТРОГРАДСКИЙ
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

*

*Утверждено к печати
редколлегией серии «Классики науки»
Академии наук СССР*

*

*На шмуцтитуле портрет -
гравюра на дереве выполнен
художником-гравером
М. С. Беловым*

Редактор Издательства *Н. В. Травин*
Технический редактор *Р. С. Певзнер*
Корректоры *Н. Г. Гилинская,
Л. В. Семенова* и *Б. Р. Флакс*

*

Сдано в набор 25/VII 1958 г. Подписано
к печати 15/XI 1958 г. РИСО АН СССР
№ 4-103В. Формат бумаги $70\times92^1/_{16}$. Бум.
л. $18^1/_4$. Печ. л. $36^1/_2$=42.70 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 35.52. Изд. № 497.
Тип. зак. № 778. Тираж 3000.

Цена 26 р. 85 к.

Ленинградское отделение Издательства АН СССР
Ленинград, В-164, Менделеевская лин., д. 1

1-я тип. Издательства Академии наук СССР
Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12

М.В.ОСТРОГРАДСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ





2 р. 85 к.